Matematik
Chalmers tekniska högskola 2016-08-25

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Carl Lundholm, ankn 5325 Plats och tid: SB, 8:30-12:30
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

---

1 Denna uppgift omfattar 14 poäng och finns på separat blad på vilket lösningar och svar ska skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar**.

2 (a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller den räta linjen (4p)

$$l_1 : x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

och är parallell med

$$l_2 : \frac{x+1}{3} = y + 7 = \frac{z-2}{2}$$

(b) Låt $P = (4, 3, 7)$. Bestäm koordinaterna för punkten P:s spegelbild i planet från uppgift (a). (3p)

(a) Riktningsvektorer för l_1 och l_2 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Det sökta planets normalvektor $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ ska vara ortogonal mot $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$, dvs

$$\begin{cases} n_1 + 2n_2 - n_3 = 0 \\ 3n_1 + n_2 + 2n_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

dvs $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$ där $t \in \mathbb{R}$. Längden på normalvektorn är inte relevant, så låt $t = 1$, vi får $n = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och planet $\pi = -x + y + z = D$.

$(0,-1,1) \in l_1 \Rightarrow (0,-1,1) \in \pi$, dvs $D = 0 - 1 + 1 = 0$, planets ekvation blir

$$-x + y + z = 0$$

(b) För projektion P_r av punkten $P = (4,3,7)$ i planet ansätter vi $P_r = P + \alpha \boldsymbol{n}$ där

$$\alpha = \frac{D - \boldsymbol{n} \cdot P}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}} = \frac{0 - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{4 - 3 - 7}{3} = -2$$

$$P_r = P + \alpha \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

---

3 Låt $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och låt $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(a) Motivera att $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ och $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ är baser för $\mathbb{R}^2$ (2p)

(b) Låt $\boldsymbol{p}_E$ ha koordinaterna $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i standardbasen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Bestäm $\boldsymbol{p}_U$, koordinaterna för $\boldsymbol{p}_E$ relativt basen $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$. (2p)

(c) Låt $\boldsymbol{p}_V = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i basen $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. Bestäm koordinater för $\boldsymbol{p}_V$ i baserna $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ samt i basen $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ (3p)

(d) Beräkna (4p)

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T / \boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1$$

där $\boldsymbol{u}_1$ enligt ovan, och $\boldsymbol{I}$ är identitetsmatrisen. Är $\boldsymbol{P}$ ortogonal? Motivera ditt svar.

(a) De två paren av vektorer är inte parallella och därmed linjärt oberoende, och utgör därför baser för $\mathbb{R}^2$.

(b) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7/8 \\ 0 & 1 & 3/8 \end{array}\right]$, dvs $\boldsymbol{p}_U = \begin{bmatrix} 7/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}$.

(c) $\boldsymbol{p}_V$ i basen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ ges av $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{p}_V$ i basen $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ ges av $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$, dvs koordinaterna $\begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

(d) $\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + 9 = 10$, $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^T/\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2/10 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 3/5 & 9/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{P}$ är ortogonal eftersom $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{I}$

---

4 Man har diskretiserat ett randvärdesproblem och fått följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \\ 2.4 \\ 5.2 \end{bmatrix}$$

(a) Visa att kolumnerna i koefficientmatrisen är linjärt oberoende. (3p)

(b) Följande matlabsekvens

```
A = [2 -1 0 0; -1 2 -1 0; 0 -1 2 -1; 0 0 -1 2];
[X,D] = eig(A);
```

beräknar egenvektorer och egenvärden till `A`. I `D` finns egenvärdena på huvuddiagonalen, och motsvarande egenvektor finns i korresponderande kolumn i `X`.

(i) Egenvärdena till `A` är reella. Motivera varför. (1p)

(ii) Antag (2p)

$$\mathtt{D} = \begin{bmatrix} a/b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c/b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c/a \end{bmatrix}$$

där $a \neq b \neq c \neq 0$ är heltal. Bestäm D^{-1}

(iii) Formulera inversen till `A`, uttryck dig i `X` och `D`. Motivera ditt svar (3p)

(c) Antag att matrisen ovan är $n \times n$ stor, men med samma struktur (2:or på huvuddiagonalen, -1 på bidiagonalerna enligt ovan). Hur många radoperationer behöver man (minst) utföra för att reducera matrisen till trappstegsform (triangulär form). Motivera ditt svar. (2p)

(a) Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

dvs matrisen har fyra linjärt oberoende kolumner.

(b) (i) Matrisen är reell och symmetrisk.

(ii)

$$\mathtt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} b/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a/c \end{bmatrix}$$

(iii) $\boldsymbol{A}$ är reell, symmetrisk och kan därmed diagonaliseras. Vi har $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T$, eller $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. Vi får

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}^T)^{-1} = (\boldsymbol{X}^T)^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{X}^T$$

I Matlab:

```
Ainv = X*inv(D)*X'
```

(c) Vi behöver nollställa elementen under huvuddiagonalen, dvs (n-1) radoperationer behövs.

---

5 Sönderfall av en viss radioaktiv substans beskrivs av formeln

$$y(t) = M_A e^{-0.2t} + M_B e^{-0.7t}$$

där M_A och M_B är två konstanter. Man har uppmätt följande $(t_i, y(t_i))$ värden

t_i	10	11	12	14	15
$y(t_i)$	21.34	20.68	20.05	18.87	18.30

(a) Formulera en modell som i minsta kvadratmetodens mening bestämmer M_A och M_B. Vi vill se designmatris och högerled. (3p)

(b) Beskriv, eller skriv Matlabkod, hur man går tillväga för att lösa problemet och bestämma värden på M_A och M_B ovan. Ange även hur man bestämmer det kvadratiska medelfelet. (3p)

(a) Lös det överbestämda systemet

$$\begin{bmatrix} e^{-2} & e^{-7} \\ e^{-0.2*11} & e^{-0.7*11} \\ e^{-0.2*12} & e^{-0.7*12} \\ e^{-0.2*14} & e^{-0.7*14} \\ e^{-0.2*15} & e^{-0.7*15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.34 \\ 20.68 \\ 20.05 \\ 18.87 \\ 18.30 \end{bmatrix}$$

(b) I Matlabkod

```
e = [10, 11, 12, 14, 15]';
A = [exp(-0.2*e) exp(-0.7*e)];
y = [21.34;20.68;20.05;18.87;18.30];
M = A\y
kvadratiskamedelfelet = norm(A*M-y);
```

---

1 **(a)** Vilka av följande påståenden är sanna, vilka är falska. Motivera dina svar. (2p)

(i) Om matriserna $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$ har m rader och n kolumner så är produkterna $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$ och $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$ definerade.

(ii) Låt $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{C}$ vara tre 2×2 matriser. Om $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$, så är $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(i) Sant, dimensionerna stämmer för bägge matrismultiplikationerna.

(ii) Falskt, låt tex $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Vi har då $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{C}$ men $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$

(b) Låt $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & p & p \end{bmatrix}$ där $p \in \mathbb{R}$. Beräkna determinanten för $\boldsymbol{A}$ (3p)

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & p & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-p & 4-p \end{bmatrix}$ Utveckling längs 2:a raden ger $\det(\boldsymbol{A}) = 0$

(c) Bestäm alla lösningar till (3p)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

x_3 fri, så låt $x_3 = t$. Vi får

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(d) Låt $\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning som först avbildar $\boldsymbol{e}_2$ till $\boldsymbol{e}_2 - 0.5\boldsymbol{e}_1$, och låter $\boldsymbol{e}_1$ vara oförändrad, sedan speglar resultatet genom x_2 axeln med standardmatrisen $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ($\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ är enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^2$). Bestäm standardmatrisen för hela avbildningen. (3p)

I första steget är $\boldsymbol{e}_1$ oförändrad, för att sedan speglas genom x_2 axeln, dvs $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_1$. För $\boldsymbol{e}_2$ gäller att i första steget avbildas $\boldsymbol{e}_2$ på $\boldsymbol{e}_2 - 0.5\boldsymbol{e}_1$, som sedan speglas genom x_2-axeln, och förblir oförändrad. Vi får alltså $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 - 0.5\boldsymbol{e}_1$. Standardmatrisen för hela avbildningen blir alltså

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_1) & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 - 0.5\boldsymbol{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & .5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(e) Låt (3p)

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}$$

där p är ett reellt tal. Bestäm p så att $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ blir linjärt oberoende.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & p & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & p & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array}\right]$$

Dvs om $p \neq 1$ blir vektorerna linjärt oberoende. Låt tex $p = 2$