MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa
Datum: 2010-09-15 kl. 08.30 - 09.30

Inledande matematik M/TD, Dugga 2

Övningsdugga 1

NAMN: Hossein Raufi

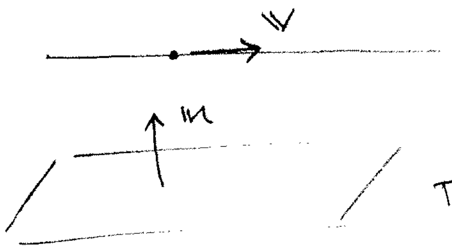
Personnummer: ....

Program: (ringa in) **M** **TD** F

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Bestäm konstanten a så att den räta linjen $(x, y, z) = (1 + at, t, 3 - 4t)$ $t \in \mathbb{R}$ och planet $x + 3y - 5z = 0$ är parallella. (1 p)

Lösn.:



$\ell : \mathbf{x} = (1, 0, 3) + t\underbrace{(a, 1, -4)}_{= \mathbf{v}}$

$\pi : \quad x + 3y - 5z = 0$

$\mathbf{n} = (1, 3, -5)$

Ser att: $\ell // \pi \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad a + 3 + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{a = -23}}$

2. Filen `filur.m` har följande utseende:

```
function y=filur(u,v,w)

n=cross(u,v);
nhatt=n/norm(n);
whatt=w/norm(w)
y=dot(nhatt,whatt);
```

Vi skriver följande på kommandoraden

```
>> clear all
>> u=[2 0 2];
>> v=[4 -1 2];
>> w=[1 1 2];
>> a=filur(u,v,w)
```

Vilket värde har nu a? (1 p)

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (0 + 2, 8 - 4, -2) =$$

$$= (2, 4, -2)$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{24}}(2, 4, -2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$$

$$y = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{6}(1 + 2 - 2) = \frac{1}{6}$$

$$a = y = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$

3. Använd Gausselimination för att bestämma för vilka värden på a som följande ekvationssystem är lösbart (eng: consistent). Svara med intervall. (2 p)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{cases}$$

Lösn.:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -4 \quad -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & a-3 & 0 \end{array}\right] \times\left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim$$

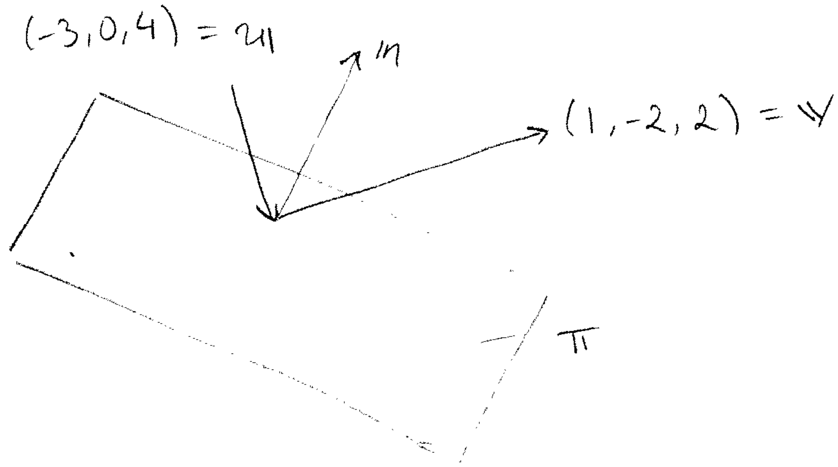
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & 0 \end{array}\right] 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Lösbart då $a \neq 1$

$\therefore$ Lösbart $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

4. En ljusstråle med riktningsvektorn $(-3, 0, 4)$ reflekteras i ett plan som innehåller origo. Den reflekterade strålen har riktningsvektorn $(1, -2, 2)$. Bestäm planets ekvation. (2 p)

Lösn.:



Ser att $n = -u + v$ förutsatt att den infallande och reflekterade strålen båda är lika långa. Vi börjar därför med att normera

$$\hat{u} = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{5}(-3, 0, 4) = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{3}(1, -2, 2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow n = -\hat{u} + \hat{v} = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{14}{15}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}\right)$$

$$\Rightarrow \pi : \frac{14}{15}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{15}z = D$$

Planet innehåller origo $\Rightarrow \pi : \frac{14}{15}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{15}z = 0$

$$\therefore \pi : 7x - 5y - z = 0$$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa
Datum: 2010-09-15 kl. 08.30 - 09.30

Inledande matematik M/TD, Dugga 2

Övningsdugga 2

NAMN: Hossein Raufi

Personnummer: ....

Program: (ringa in) **M** **TD** F

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Beräkna gränsvärdet (1 p)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Lösn: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} x<0 \\ \text{då } x\to-\infty \end{array} \right\} =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \underline{\underline{-1.}}$

2. Finn skärningslinjen mellan planen $x - 2y - z = 7$ och $x - 2y = 3$. (1 p)

Lösn: $\ell : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$

$\Pi_1 : x - 2y - z = 7 \Rightarrow \mathbf{n}_1 = (1, -2, -1)$

$\Pi_2 : x - 2y = 3 \longrightarrow \mathbf{n}_2 = (1, -2, 0)$

ℓ skärningslinje $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1$ och $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2$

$\Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & -\hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -1, 0)$

Pkt på linjen uppfyller ekv.systemet $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = 7 \\ x - 2y = 3 \end{array} \right.$

t.ex $\mathbf{x}_0 = (3, 0, -4)$

$\therefore \ell : \mathbf{x} = (3, 0, -4) + t(-2, -1, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

3. Visa att (2 p)

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

Bevis: $VL = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha)$

$= \{\text{konjugatregeln}\} = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha =$

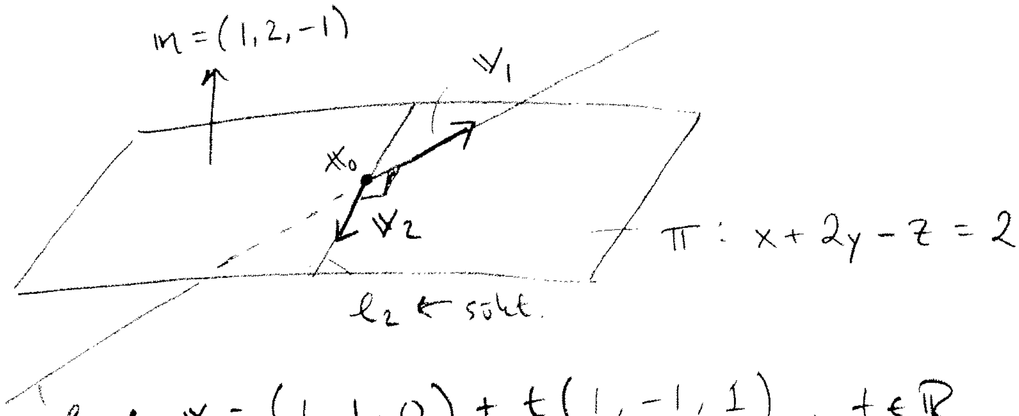
$= \{\text{trig. ettan}\} = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha) =$

$= \sin^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sin^2\beta + \cancel{\sin^2\beta\sin^2\alpha} =$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta = HL$ $\blacksquare$

4. Bestäm ekvationen för den räta linje i planet $x+2y-z=2$ som skär linjen $(x,y,z) = (1+t, 1-t, t)$ $t \in \mathbb{R}$ under rät vinkel. (2 p)

Lösn.:



$$\ell_1 : \mathbf{x} = (1,1,0) + t\underbrace{(1,-1,1)}_{\mathbf{v}_1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ser att: $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{n}$ och $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & -\hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -3)$$

Punkt på ℓ_2 fås som skärningspkten mellan π och ℓ_1.

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

Insatt i planets ekvation ger detta

$$1 + t + 2(1-t) - t = 2 \iff$$

$$\iff 3 - 2t = 2 \iff t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_0 = \left(1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \ell_2 : \mathbf{x} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + t(1, -2, -3), \quad t \in \mathbb{R}$$

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa
Datum: 2010–09–15 kl. 08.30 - 09.30

Inledande matematik M/TD, Dugga 2

Övningsdugga 3

NAMN: Hossein Raufi

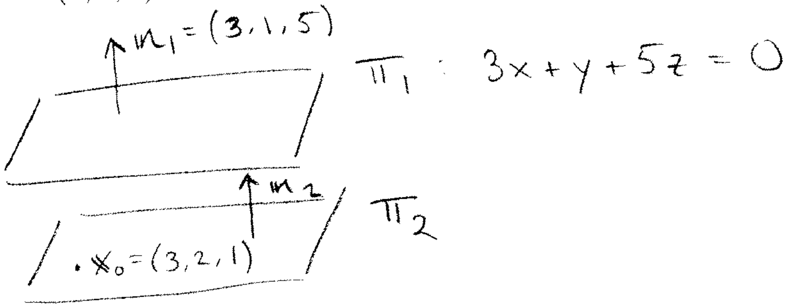
Personnummer: ....

Program: (ringa in) **M** **TD** **F**

Uppgift	Poäng
1	
2	
3	
4	
SUMMA:	

1. Bestäm ekvationen för det plan som är parallellt med planet $3x + y + 5z = 0$ och som går genom punkten $(3, 2, 1)$. (1 p)

Lösn.:



Ser att $\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n_2 = (3, 1, 5) \Rightarrow \Pi_2 : 3x + y + 5z = D$

Π_2 innehåller punkten $(3, 2, 1)$: $3 \cdot 3 + 2 + 5 \cdot 1 = D$

$\Leftrightarrow D = 16$

$\therefore \Pi_2 : 3x + y + 5z = 16$

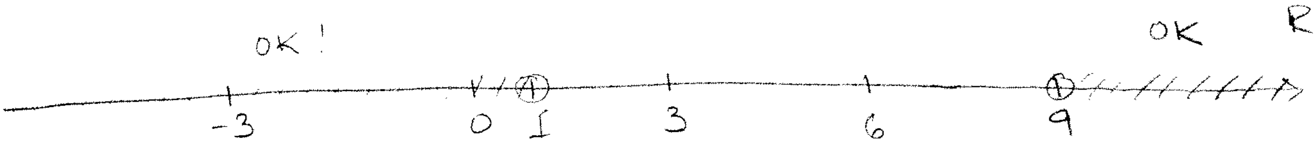
2. Lös följande ekvation geometriskt (svara med intervall) (1 p)

$$|x + 3| < 2|x - 3|.$$

Lösn.: $|x+3|$ = avståndet mellan x o -3

$|x-3|$ = avståndet mellan x o 3

$\Rightarrow |x+3| < 2|x-3|$ " = " alla pkter vars avstånd till -3 är mindre än dubbla deras avstånd till 3.

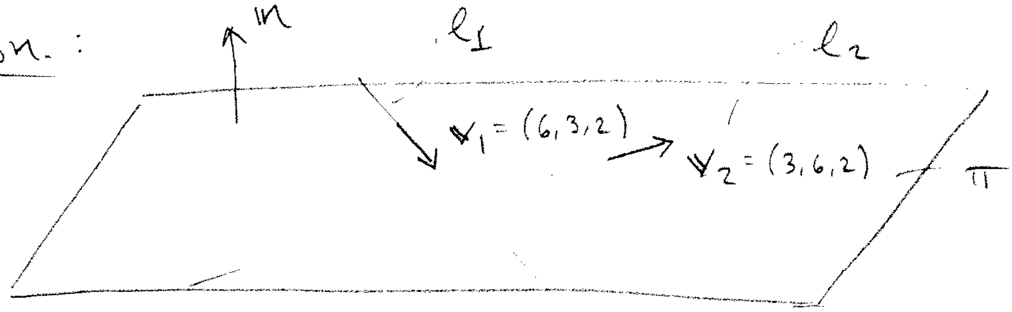


$\therefore$ Sann $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (9, \infty)$

3. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjerna (2 p)

$$l_1: \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{2}, \qquad l_2: \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+7}{6} = \frac{z-1}{2}.$$

Lösn.:



Ser att: $n \perp v_1$ och $n \perp v_2$

$$\Rightarrow n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-6, -6, 27)$$

$$\Rightarrow \pi: \; -6x - 6y + 27z = D$$

Vilken punkt som helst som ligger på någon av linjerna ligger också i planet.

T.ex. ligger $x_0 = (1, 2, 3)$ på l_1

$$\Rightarrow -6\cdot 1 - 6\cdot 2 + 27\cdot 3 = D \iff$$

$$\iff 81 - 18 = D \iff D = 63$$

$$\Rightarrow \pi: \; -6x - 6y + 27z = 63 \iff 2x + 2y - 9z = -21$$

$$\therefore \; \pi: \; 2x + 2y - 9z = -21$$

4. (a) Ange den exakta definitionen av gränsvärdet (1 p)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

(b) Visa med hjälp av definitionen ovan att (1 p)

$$\lim_{x \to 2} (5 - 2x) = 1.$$

Lösn.: (a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ ; \ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

(b) Låt $\varepsilon > 0$ godtyckligt. Vill visa att

$$|(5 - 2x) - 1| < \varepsilon$$

om $0 < |x - 2| < \delta$ där $\delta > 0$ väljs tillräckligt litet.

Välj $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Då får vi att

$$|(5 - 2x) - 1| = |4 - 2x| = |-2(x - 2)| =$$

$$= |-2||x - 2| = 2|x - 2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \blacksquare$$