**MATEMATIK**
Chalmers tekniska högskola

**Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Datum: 2010–09–29 kl. 08.30 – 09.30

# Inledande matematik M/TD, Dugga 3

---

## Övningsdugga 1

**NAMN:** Hossein Raufi

**Personnummer:** ..................................................................

**Program:** (ringa in) **M** **TD** F

| Uppgift | Poäng |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |
| 4 | 2 |
| SUMMA: | 4 |

**1.** Bestäm en Lipschitz-konstant till $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$ på intervallet $[-3, 2]$. (1 p)

Lösn.: $L = \max_{x \in [-3,2]} |f'(x)| = \max_{x \in [-3,2]} |6x + 2| =$

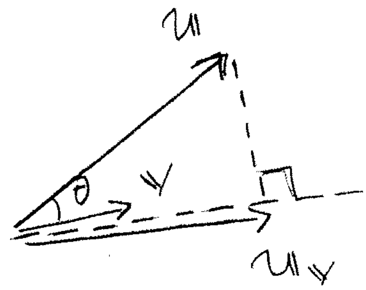
$$= |6 \cdot (-3) + 2| = |-16| = \underline{\underline{16}}$$

Bra!

1p

**2.** Skriv en MATLAB-funktion `vprojection.m` som beräknar vektorprojektionen av en vektor **u** på en vektor **v**. (1 p)

Lösn.:




$$|\mathbf{u}_{\mathbf{v}}| = |\mathbf{u}| \cos\theta =$$

$$= \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

Vi får härmed MATLAB-programmet

```
function y = vprojection(u,v)
y = (dot(u,v)/(norm(v)^2))*v;
```

1p

(Det går bra att bara svara med MATLAB-programmet om man har lärt sig formeln för vektorprojektion utantill.)

**3.** Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt så är den även kontinuerlig i punkten samt ge ett motexempel som visar att det omvända ej gäller. (2 p)

Se föreläsningsanteckningarna eller kursboken!

/ 0p

**4.** Beräkna (2 p)

$$\cos\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

<u>Lösn.</u>: Kalla $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ för $\theta$

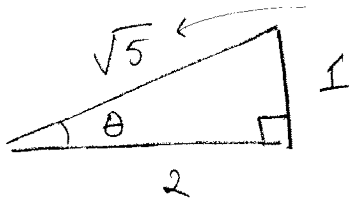
$$\cos\left(2\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \cos(2\theta) =$$

$$= \cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta =$$

$$= (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 =$$

$$= \left(\cos\left(\arctan\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\arctan\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 =$$

= {




Pythagoras sats } =

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}.$$

/ 2p

Utmärkt!

MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

**Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Datum: 2010-09-29 kl. 08.30 - 09.30

# Inledande matematik M/TD, Dugga 3

---

## Övningsdugga 2

**NAMN:** Hossein Raufi

**Personnummer:** ..................

**Program:** (ringa in) **M** **TD** F

| Uppgift | Poäng |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 0 |
| SUMMA: | 4 |

**1.** Beräkna två steg av bisektionsalgoritmen med följande data: $f(x) = x^2 - 3$ och $I = [1, 5]$. (1 p)

Lösn.: $[x_0, X_0] = [1, 5]$

Steg 1: $\tilde{x} = \frac{x_0 + X_0}{2} = 3$, $f(\tilde{x}) = 6$

$f(x_0) f(\tilde{x}) = (-2) \cdot 6 < 0 \Rightarrow [x_1, X_1] = [1, 3]$

Steg 2: $\tilde{x} = \frac{x_1 + X_1}{2} = 2$, $f(\tilde{x}) = 1$

$f(x_1) f(\tilde{x}) = (-2) \cdot 1 < 0 \Rightarrow [x_2, X_2] = [1, 2]$

/ 1p

**2.** Låt $y(x) = \ln(\sqrt{x^2 + a^2} - x)$ där $a \in \mathbb{R}$. Beräkna $y'(x)$ och förenkla resultatet. (1 p)

Lösn.: $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2} - x} \cdot \left( \frac{1}{\cancel{2}} (x^2 + a^2)^{-1/2} \cdot \cancel{2}x - 1 \right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2} - x} \cdot \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} \right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2} - x} \cdot \frac{x - \sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}} =$

$= \frac{1}{-\cancel{(x - \sqrt{x^2+a^2})}} \cdot \frac{\cancel{x - \sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

/ 1p

Bra!

**3.** Vi ska bygga ett kubiskt rum med sidan 10 m. Mitt i rummet står en lodrät pelare från golv till tak med tvärsnittsarean 1 m$^2$. Bestäm en tolerans för felet i sidan om feltoleransen i volymen (av kuben minus pelaren) är ±1%. Ledning: Använd Lipschitz-villkoret. (2 p)

Lösn.: Om sidan är exakt 10 m kommer volymen att vara

$$V_{exakt} = 10^3 - 1 \cdot 1 \cdot 10 = 990 \text{ m}^3$$

1% av Vexakt : $990 \cdot 0.01 = 9.9$ m

Om sidan är x m blir volymen

$$V(x) = x^3 - 1 \cdot 1 \cdot x = x^3 - x \text{ m}^3$$

Vi vill alltså hitta de x för vilka

$$|V(x) - 990| < 9.9$$

Dessa x-värden kommer att vara nära $x = 10$ säg $x \in [9, 11]$. $V(x)$ är Lipschitz-kont. på $[9, 11]$ med Lipschitz-konst.

$$L = \max_{x \in [9,11]} |V'(x)| = \max_{x \in [9,11]} |3x^2 - 1| = 362$$

$$\Rightarrow |V(x) - 990| = |V(x) - V(10)| \leq 362 |x - 10|$$

Alltså kommer $|V(x) - 990| < 9.9$ om

$362 |x - 10| < 9.9$ dvs $|x - 10| < \frac{9.9}{362}$

2p

Utmärkt!

**4.** Visa att (2 p)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Se föreläsningsanteckningarna
eller kursboken!

/ 0p

**MATEMATIK**
Chalmers tekniska högskola

**Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Datum: 2010–09–29 kl. 08.30 – 09.30

# Inledande matematik M/TD, Dugga 3

---

## Övningsdugga 3

**NAMN:** Hossein Raufi

**Personnummer:** ..........

**Program:** (ringa in) **M** **TD** F

| Uppgift | Poäng |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 0 |
| SUMMA: | 4 |

$[0, 0.5]$

**1.** Bestäm en Lipschitz-konstant till $f(x) = \arcsin(x)$ på intervallet ~~$[0.5, 1]$~~. (1 p)

FEL!

Lösn.: $L = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f'(x)| =$

$$= \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

1p

**2.** Beräkna (1 p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}.$$

Lösn.: $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{\sin(3x)}{1}\cdot\frac{3x}{3x}\cdot\frac{1}{\sin(2x)}\cdot\frac{2x}{2x} =$

$$= \frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin(2x)}\cdot\frac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}}\cdot\frac{3}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Bra!

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}$$

1p

**3.** Ange ekvationen för tangenten till kurvan $y = \arctan(\sqrt{3} + 2x)$ i den punkt på kurvan där $x = 0$. (2 p)

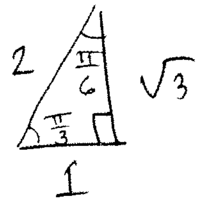
Lösn.: $y'(x) = \dfrac{1}{1 + (\sqrt{3} + 2x)^2} \cdot 2$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{2}{1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Om den räta linjen har ekvationen

$$y = kx + m$$

har vi alltså att $k = \frac{1}{2}$.




Punkt på linjen: $(0, y(0)) =$

$= (0, \arctan(\sqrt{3})) = (0, \frac{\pi}{3})$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot 0 + m \iff m = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}$$

Bra!

/ 2p

**4.** Antag att $f$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på $(a, b)$. Visa att $f'(x) = 0$ för alla $x \in (a, b)$ medför att $f$ är konstant på $[a, b]$. (2 p)

Se föreläsningsanteckningarna eller kursboken!