

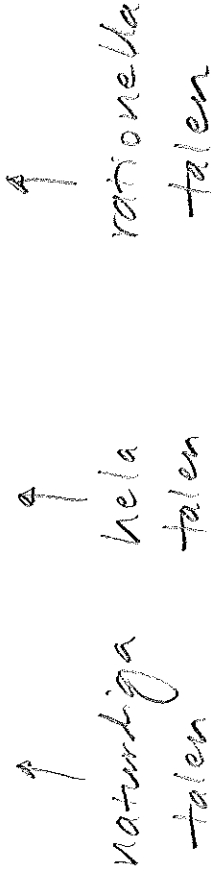
Varning: Venast mest svarade pörelövning: Ven mest svarade av TUD...  
 TMV225 Inledande matematik för M (Chalmers tekniska högskola 2016) Sen blir det nerförbacket! :-) Föreläsning 2.1

- \* Idag: Rationella tal (AL1.3)  
 F02  
 Talföljder och konvergens (AL1.4)

\* 1.1 Rationella tal

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$



$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Notera:  $p \in \mathbb{Z} \iff p/1 \in \mathbb{Q}$

Sats: Algebraiska egenskaper för  $\mathbb{Q}$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} :$$

$$x + y \in \mathbb{Q} \quad (\text{sluten})$$

$$xy \in \mathbb{Q} \quad (\text{sluten})$$

$$x + y = y + z \quad (\text{komm.})$$

$$xy = yx \quad (\text{komm.})$$

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad (\text{assoc.})$$

$$(xy)z = x(yz) \quad (\text{assoc.})$$

$$x \cdot (y+z) = xy + xz \quad (\text{distr.})$$

$$x+0 = x \quad (\text{add. ident.})$$

$$1x = x \quad (\text{mult. ident.})$$

$$\exists -x \in \mathbb{Q} : x + (-x) = 0 \quad (\text{add. inv.})$$

$$x \neq 0 \implies \exists x^{-1} \in \mathbb{Q} : xx^{-1} = 1 \quad (\text{mult. inv.})$$

Notera: Existens av  $(x)$  och  $x^{-1}$   
 möjliggör definition av  
 subtraktion och division:

$$\begin{cases} x - y = x + (-y) \\ x / y = x y^{-1}, y \neq 0 \end{cases}$$

Notera:  $\mathbb{N}$  och  $\mathbb{Z}$  saknar några  
 av dessa egenskaper:

- $\mathbb{N}$  saknar  $-x$  och  $x^{-1}$
- $\mathbb{Z}$  saknar  $x^{-1}$

( $\mathbb{Q}$  är en "kropp" / "field"  
 $\mathbb{Z}$  är en "ring"  
 $\mathbb{N}$  är en "semiring")

Sats: Ordningsegenskaper

för  $\mathbb{Q}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ :

$$x = y \vee x < y \vee x > y$$

$$x < y \Leftrightarrow y > x$$

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$$

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

$$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

Definition: Absolutbelopp

$\forall x \in \mathbb{Q}$ :

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Sats: Triangelolikheterna

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ :

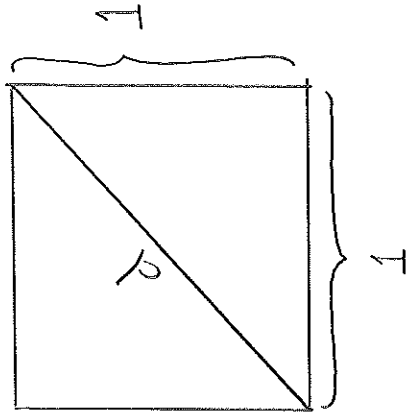
$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \quad (\text{omvända})$$

triangelolikheterna)

Endast översiktlig + på föreläsningen.  
 Se token!

De rationella talen räcker långt  
men de räcker inte till allt!



$$d = ? \quad d \in \mathbb{Q} ?$$

Sats:  $\sqrt{2}$  är inte ett rationellt tal  
 $\neg (x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2)$

Bervis:

Antag:  $x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2$

$$\Rightarrow x = p/q, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Förkorta så att  $p$  och  $q$  saknar  
gemensamma faktorer ("relativt prima")

$$x = p/q$$

$$\Rightarrow x^2 = (p/q)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (p')^2 = 2(q')^2 \quad (*)$$

$\Rightarrow (p')^2$  delbart med 2

$\Rightarrow p'$  delbart med 2

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : p' = 2k$$

$$(*) \Rightarrow (2k)^2 = 2(q')^2$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 2(q')^2$$

$$\Rightarrow 2k^2 = (q')^2$$

$\Rightarrow (q')^2$  delbart med 2

$\Rightarrow q'$  delbart med 2

$\Rightarrow p'$  och  $q'$  båda delbara med 2!

$\Leftarrow$  motsträrfelse

$$\Rightarrow \neg (x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2)$$

"reductio ad absurdum" ▣

\* 1.4 Talföljder och konvergens

Vi måste (uppenbarligen) utvidga  $\mathbb{Q}$ , eftersom  $\sqrt{2}$  och många andra tal saknas i  $\mathbb{Q}$ . Vårt grundläggande verktyg kommer att vara talföljder av rationella tal.

Definition: Talföljd  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$

En regel som för varje  $n \in \mathbb{N}$  bestämmer ett entydigt värde  $x_n$  i en mängd  $X$ .

Exempel:

(1)  $x_n = 2n$ : 0, 2, 4, 6, ... (jämma talen)

(2)  $x_n = 2n+1$ : 1, 3, 5, 7, ... (udda talen)

(3)  $x_0 = x_1 = 1$ ,  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

Fibonacci-tal: 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, ...

(4)  $y_n = x_{n+1} / x_n$  där

$(x_n)_{n=0}^{\infty}$  är Fibonacci-talen

1, 2, 1.5, 1.66..., 1.625, ...

$\rightarrow \phi = (\sqrt{5} + 1) / 2$

"Gyllene snittet"

(5)  $x_n = 1/(n+1)$ : 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...

$\rightarrow 0$

(6)  $x_0 = 1$ ,  $x_n = \frac{x_{n-1} + 2/x_{n-1}}{2}$

$x_0 = 1 = 1$

$x_1 = 3/2 = 1.5$

$x_2 = 11/8 = 1.375$

$x_3 = 183/128 \approx 1.43$

$x_4 = 46127/32768 \approx 1.41$

$\rightarrow \sqrt{2} \quad ! \quad (?)$

Notera: Talföljderna (4), (5) och (6) är speciella!

- De ser ut att närma sig något.  
(Men vad?)

- De ser ut att stabiliseras.

Närma sig något  $\Leftrightarrow$  stabiliseras (\*)

- Kan en talföljd närma sig något utan att stabiliseras?
- Kan en talföljd stabiliseras utan att närma sig något?

Vi kommer att definiera två viktiga begrepp:

Konvergens = närma sig något

Cauchy-följd = stabiliseras

Vi kommer också att prata på följande (\*).

Definition: Konvergent rationell talföljd  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  med gränsvärde  $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ .

$\varepsilon$  positivt rationellt tal

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists N \in \mathbb{N} :$$

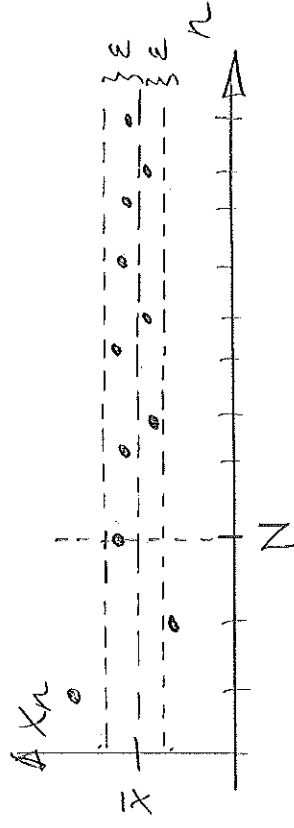
$$n \geq N \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

(superviktig definition!)

Skrivsätt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

$$x_n \rightarrow \bar{x} \text{ då } n \rightarrow \infty$$



Tolkning:

Talföljd  $(x_n)$  anklagad för att inte vara konvergent.

Vår uppgift som försvarare (matematiker) att försvara talföljdens konvergens...

Aklagare: -  $(x_n)$  är inte konvergent!

Försvar: - Joho! Ty  $|x_n - \bar{x}|$  kan göras hur liten som helst.

Å: - Det tror jag inte på.

F: - Bring it on!

Å: - OK, kan du göra  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon = 10^{-6}$

F: - Enkelt, tag bara  $n \geq N = 1000$ .

Å: - OK, men jag vill se  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon = 10^{-100}$ !!!

F: - Nemas problemas, tag bara  $n \geq N = 39765$ .

Å: - OK, OK, jag tror dig!

Exempel:  $(x_n)$ ,  $x_n = 1/n$  konvergent  
(Harmonisk talföljd)

$$x_n = 1/n \rightarrow \bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow |x_n - \bar{x}| = |1/n - 0| = 1/n$$

$$\leq 1/N, \text{ t.g. } n \geq N$$

$$< \varepsilon \quad \checkmark$$

Ja, om

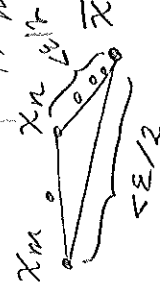
$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow N > 1/\varepsilon \quad \text{avrundning uppåt}$$

$$\text{Tag } N = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$$

(Funkar faktiskt också med

$$N = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1.)$$



Definition: Cauchy-följd  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$   
(Rationell)

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \exists N \in \mathbb{N} : \\ m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Med andra ord: Om  $m$  och  $n$  är stora så kommer  $x_m$  och  $x_n$  godtyckligt nära-tal-följden

$(x_n)_{n=0}^{\infty}$  stabiliserar.

Sats:  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  (rationell) konvergent

$\Rightarrow (x_n)_{n=0}^{\infty}$  Cauchy-följd

Med andra ord:

"nära sig något"  $\Rightarrow$  "stabiliserar"

Bevis:

$$|x_m - x_n| = |x_m - \bar{x} + \bar{x} - x_n| \\ \leq |x_m - \bar{x}| + |\bar{x} - x_n| \\ < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

↙ "Lägg till och dra ifrån"

↖ triangelolikheten

Förutsatt att:

$$m, n \geq N \text{ sådant att}$$

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon/2$$

Möjligt ty  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  konvergent.

$\therefore (x_n)_{n=0}^{\infty}$  är en Cauchy-följd.  $\blacksquare$

Sats: Rationell talföljds gränsvärde är alltid unikt.

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow \bar{x} \\ x_n \rightarrow \tilde{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} = \tilde{x}.$$

Bervis: Se boken.

Sammanfattning:

$$(x_n)_{n=0}^{\infty} \text{ konvergent}$$

$$\Downarrow \text{Cauchy-följd}$$

Med andra ord:

"nära sig något"  $\Rightarrow$  "stabiliseras"

Den stora frågan är:

Gäller det omvända?

Vi svarar på denna mycket fundamentala frågan på morgondagens föreläsning.....