* Idag:

$\boxed{F04}$

- Funktionsbegreppet (AL 2.1)
- Funktionsrum & funktionsalgebra (AL 2.2)

2.1 Funktionsbegreppet

Definition: Funktion

En regel f som för varje argument $x \in X$ (domänen) ger ett entydigt värde $y \in Y$ (kodomänen).

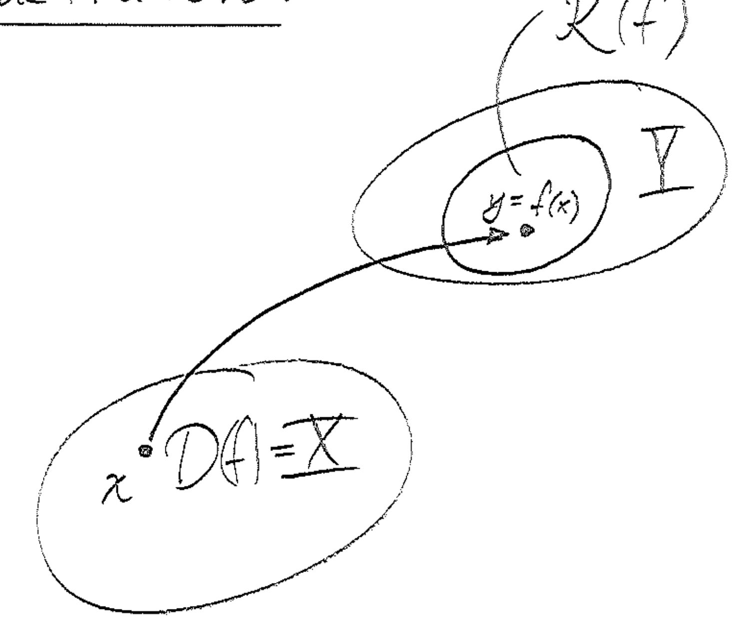
$$\begin{cases} X = D(f) = \text{definitionsmängd} \\ \qquad\qquad = \text{alla möjliga argument} \\ Y \supseteq R(f) = \text{värdemängd} \\ \qquad\qquad = \text{alla möjliga värden} \end{cases}$$

Skrivsätt:

$$f : X \to Y$$

$$f : \underset{\substack{\cap \\ X}}{x} \mapsto \underset{\substack{\cap \\ Y}}{f(x)}$$

Illustration:



<u>Exempel:</u> x^2

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f : x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = [0, \infty)$$

<u>Exempel:</u> $\sqrt{x}$

$$\begin{cases} g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ g : x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$$

$$D(f) = R(f) = [0, \infty)$$

<u>Notera:</u> $f(g(x)) = g(f(x))$

$\forall x > 0$

Jämför med datorfunktioner:

<u>C++</u>

```
int square(int x)
{
    return x*x;
}
```

<u>Haskell</u>

```
f :: Int -> Int
f x = x*x
```

<u>MATLAB</u>

```
function y=f(x)
  y=x*x
end
```

<u>Python</u>

```
def f(x):
    return x*x
```

Definition: Injektivitet

Funktionen $f : X \to Y$ injektiv om

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(olika argumen ger olika värden)

Definition: Surjektivitet

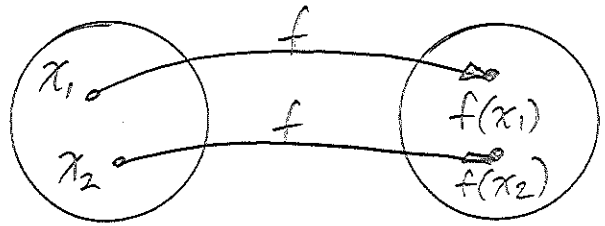
Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ surjektiv om

$$\forall y \in Y \ \exists \ x \in X : y = f(x)$$

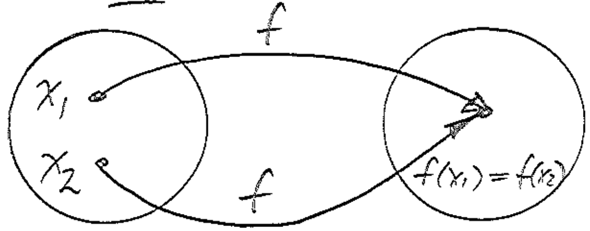
Definition: Bijektivitet

Funktionen $f : X \to Y$ bijektiv om injektiv och surjektiv.

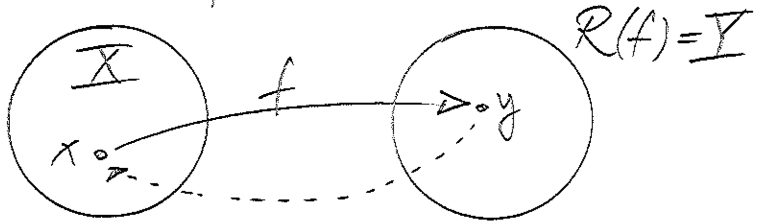
Surjektiv



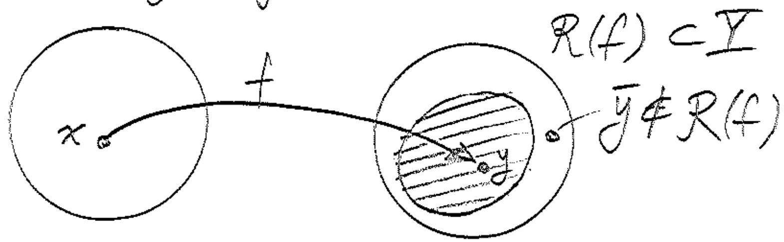
Ej surjektiv



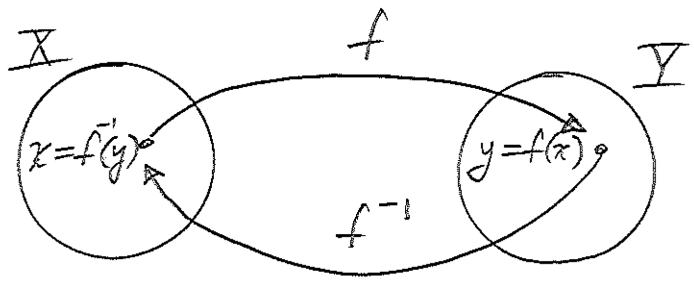
Injektiv



Ej injektiv



En funktion som är bijektiv är <u>inverterbar</u> och har en <u>invers</u>.



$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

<u>Exempel:</u>

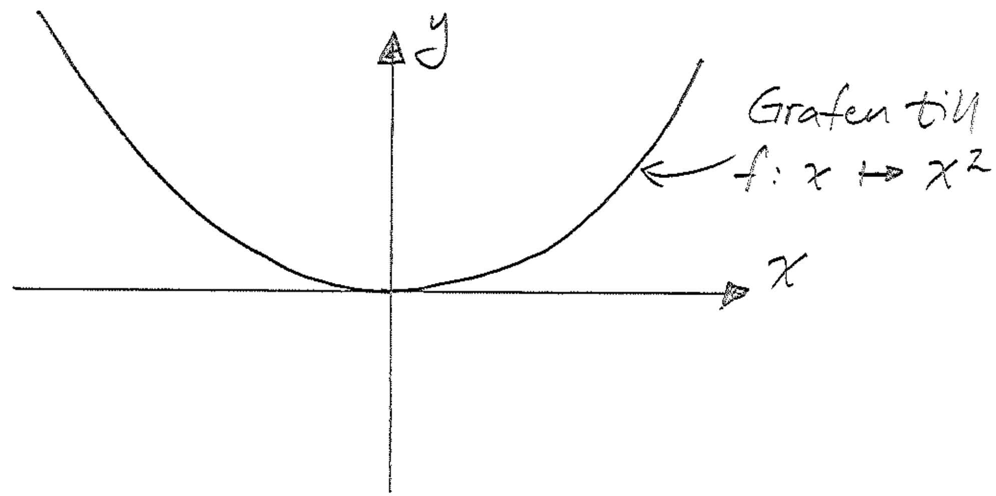
$$X = Y = [0,\infty)$$
$$f(x) = x^2$$
$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Notera:
- f ej inverterbar om $X = \mathbb{R}$ (ej bijektiv)
- f ej inverterbar om $Y = \mathbb{R}$ (ej surjektiv)

<u>Definition:</u> Graf

Mängden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=f(x)\}$

$$= \{(x,f(x)) \mid x \in D(f)\}$$



<u>Definition:</u> Restriktion

$f|_{\tilde{X}}$ = funktionen f med $x \in \tilde{X} \subseteq X$

<u>Exempel:</u> $f(x) = x^2$

$g = f|_{[0,\infty)}$ har inversen $x \mapsto \sqrt{x}$

2.2 Funktionsrum och funktionsalgebra

Definition: Funktionsrum

$$V = \{ f : X \to Y \}$$

Mängd av funktioner med samma domän och kodomän

Exempel:

$C(\mathbb{R})$ = kontinuerliga funktioner

$C^\infty(\mathbb{R})$ = oändligt deriverbara funktioner

Funktioner i ett funktionsrum kan (oftast) adderas, subtraheras, multipliceras och divideras.

Definition: Funktionsalgebra

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad (g(x) \neq 0)$$

Exempel:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = x + 1$$

Notera: $-1 \notin D(f/g)$

$$(f+g)(x) = x^2 - 1 + x + 1 = x^2 + x$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1, \quad x \neq -1$$

Definition: Sammansättning

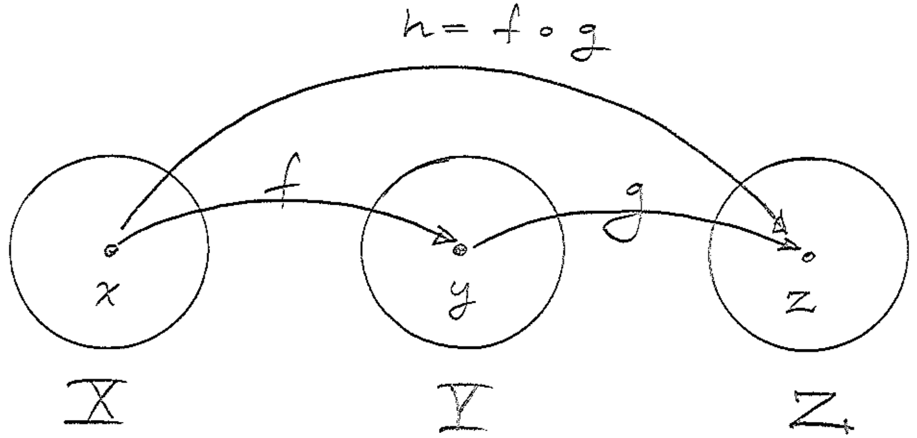
$$f : Y \to Z$$

$$g : X \to Y$$

$$h : X \to Z$$

$$h = f \circ g$$

$$h(x) = f(g(x))$$



Exempel:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 - 1$$

$$= x^2 + 2x + 1 - 1 = \underline{\underline{x^2 + 2x}}$$

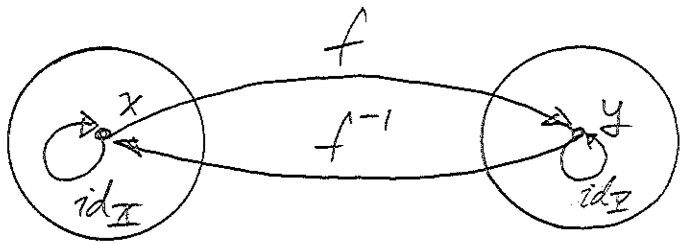
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 1) + 1 = \underline{\underline{x^2}}$$

Sammansättning med inversen: identitet

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = id_X \ ; & id_X(x) = x \ \forall x \in X \\ f \circ f^{-1} = id_Y \ ; & id_Y(y) = y \ \forall y \in Y \end{cases}$$


f
f^{-1}
x
y
id_X
id_Y