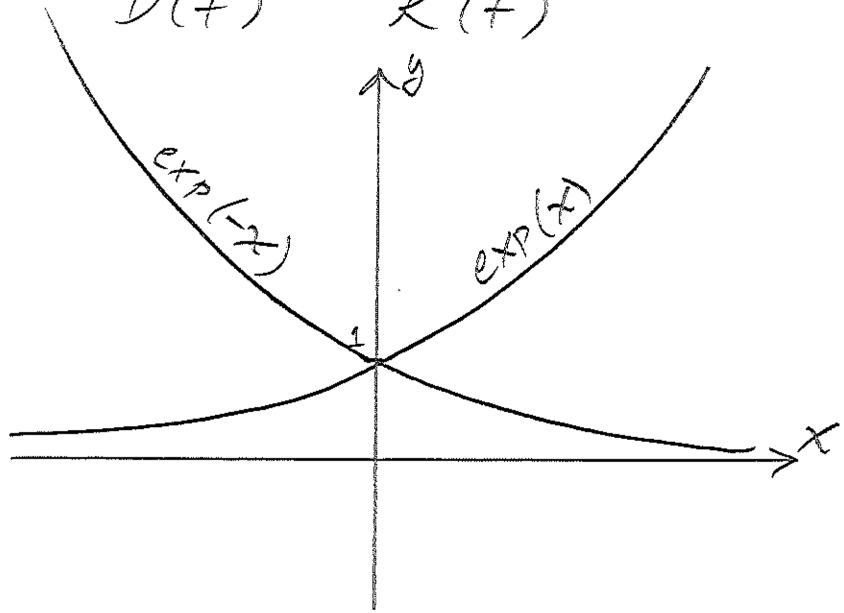
* **Idag:**

$\boxed{F06}$

- Exponentialfunktionen (AL 2.5)
- Naturliga logaritmen (AL 2.6)
- Trigonometriska funktionerna (AL 2.7)
- Arcusfunktionerna (AL 2.8)

2.5 Exponentialfunktionen

$$\exp : \underbrace{\mathbb{R}}_{D(f)} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}_+}_{R(f)}$$



Växer extremt fort!

$\exp(50) >$ antal sandkorn på jorden

$\exp(710) >$ största flyttalet i IEEE 754

standard för flyttal (decimaltal) i MATLAB och de flesta andra programmeringsspråk

Skrivsätt:

$$\exp(x) = e^x$$

$$e = \exp(1)$$
$$= \text{Eulers tal}$$
$$\approx 2.71828182 8$$

<u>Sats:</u> Exponentialfunktionens egenskaper

$$\exp(x) > 0$$

$$\exp(0) = 1 \qquad \exp(1) \approx 2.718281828$$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$$

$$\exp(-x) = 1/\exp(x) \qquad \exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$$

$$\exp(x_1+x_2) = \exp(x_1)\cdot\exp(x_2)$$

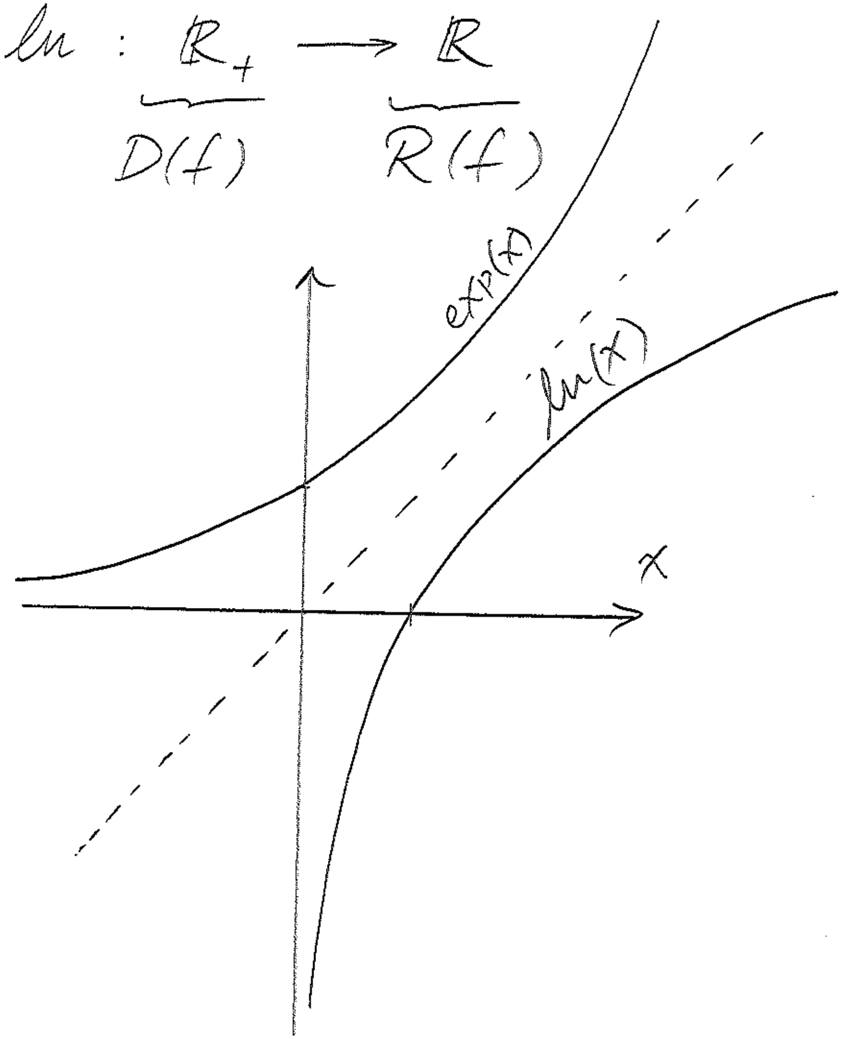
$$\exp(x_1-x_2) = \exp(x_1)/\exp(x_2)$$

<u>Notera</u>:

- $\exp(x) = \exp(1\cdot x) = (\underbrace{\exp(1)}_{=e})^x = e^x$
- $e^{x_1+x_2} = \exp(x_1+x_2) = \exp(\exp(x_1)\cdot\exp(x_2))$ $= e^{x_1}\cdot e^{x_2}$ Jämför egenskaper för potensfunktion F05!

2.6 Naturliga logaritmen

$$\ln : \underbrace{\mathbb{R}_+}_{D(f)} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{R(f)}$$



<u>Notera</u>:

- Spegelbilden av exp i $y=x$
- Växer <u>extremt</u> långsamt mot ∞

ln är inversen av exp:

$$\begin{cases} \ln = \exp^{-1} \\ \exp = \ln^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln \circ \exp = id_{\mathbb{R}} \\ \exp \circ \ln = id_{\mathbb{R}_+} \end{cases}$$

Sats: Naturliga logaritmens egenskaper

$$\ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$$

$$\ln(x_1 / x_2) = \ln x_1 - \ln x_2$$

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$

Logaritmer med andra baser:

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}} \qquad b > 0, \quad b \neq 1$$

Notera:

$$b^{\log_b(x)} = \left(e^{\ln(b)}\right)^{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}} = e^{\cancel{\ln(b)} \cdot \frac{\ln(x)}{\cancel{\ln(b)}}} = e^{\ln(x)} = x$$

$\therefore$ b-logaritmen av x

= vad man skall upphöja b till för att få x

Notera:
- $\lg = \log_{10}$
- $\ln = \log$ i MATLAB

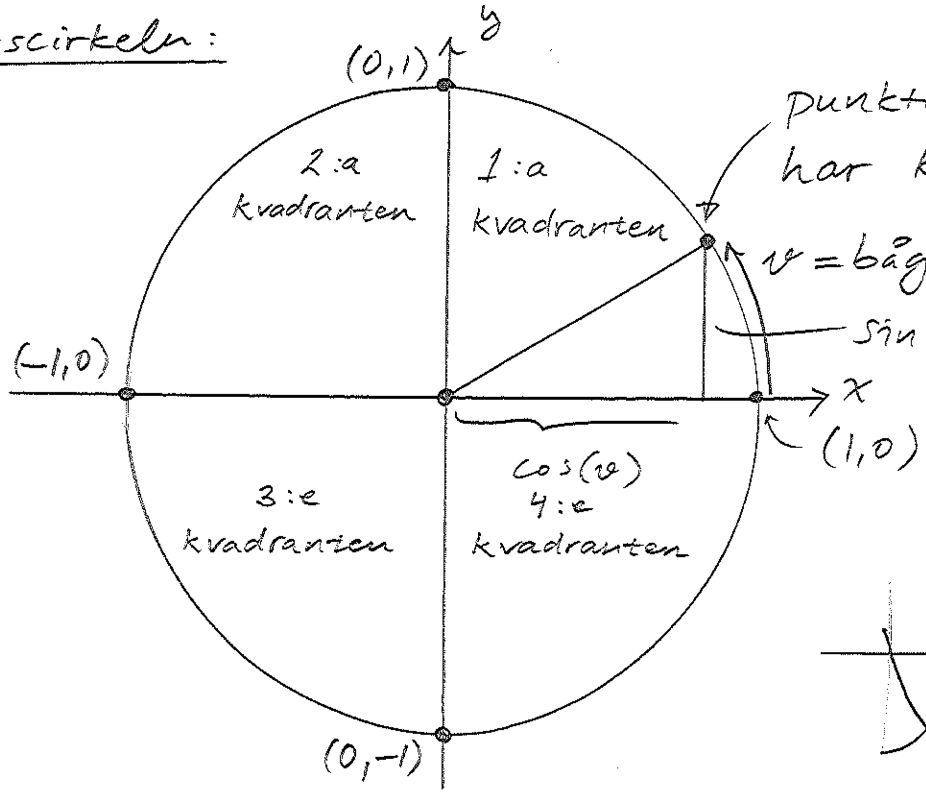
2.7 Trigonometriska funktioner

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$

$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

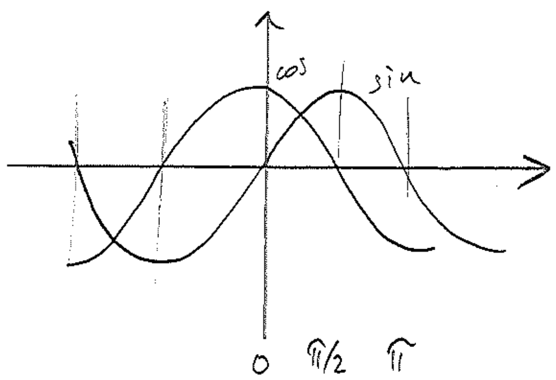
Enhetscirkeln:

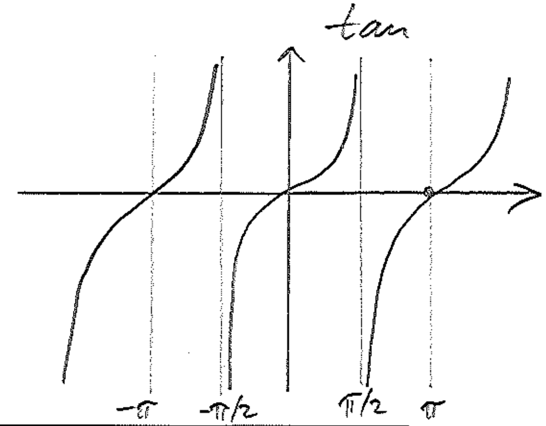


punkten på båglängdsavstånd v från $(1,0)$ har koordinaterna $(\cos(v), \sin(v))$

v = båglängd

$$\tan v = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}, \quad \cos(v) \neq 0$$





Sats: Trigonometriska funktionernas egenskaper

Speciella vinklar

$\sin(0) = 0 \qquad \cos(0) = 1$

$\sin(\pi/6) = 1/2 \qquad \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \qquad \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$

$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \qquad \cos(\pi/3) = 1/2$

$\sin(\pi/2) = 1 \qquad \cos(\pi/2) = 0$

$\sin(\pi) = 0 \qquad \cos(\pi) = -1$

Periodicitet

$\sin(x + 2\pi n) = \sin(x) \qquad \cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$

$\tan(x + \pi n) = \tan(x)$

Negativt argument udda jämn

$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x)$

Vinkelkomplementära identiteter

$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x) \qquad \cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$

$\tan(\pi/2 - x) = 1/\tan(x)$

Vinkelsupplementära identiteter

$\sin(\pi - x) = \sin(x) \qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

Trigonometriska ettan

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Additionsformler

$\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\sin(x_2)$

$\sin(x_1 - x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) - \cos(x_1)\sin(x_2)$

$\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2)$

$\cos(x_1 - x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) + \sin(x_1)\sin(x_2)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

2.8 Arcusfunktionerna

De trigonometriska funktionerna är ej injektiva (tg periodiska).

Men: Betrakta följande restriktioner

$$\sin\big|_{[-\pi/2,\,\pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$

$$\cos\big|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$\tan\big|_{(-\pi/2,\,\pi/2)} : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Dessa funktioner är bijektiva.

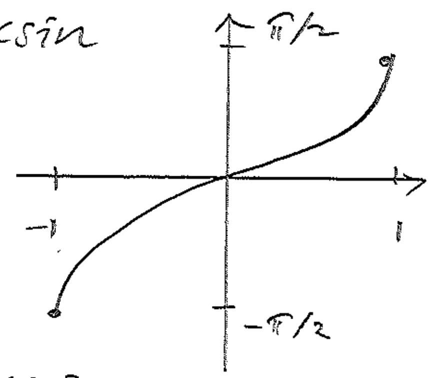
Inverserna betecknas

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

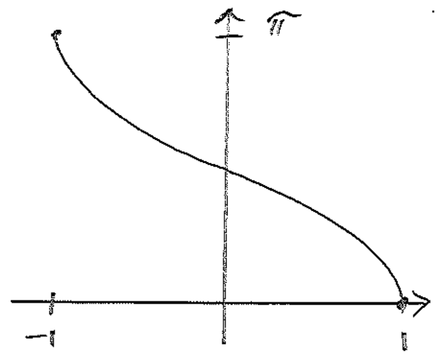
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

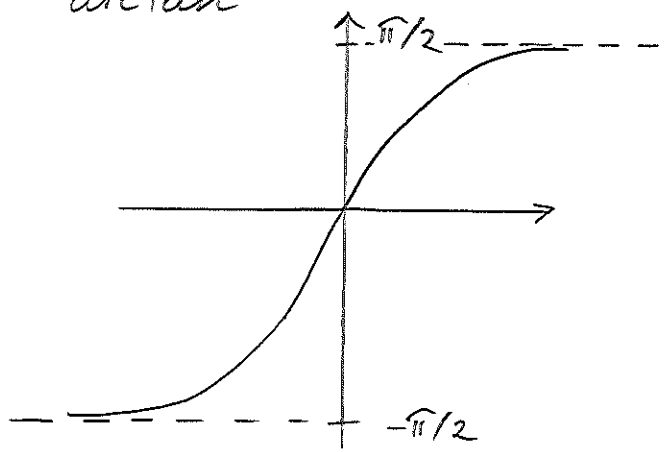
arcsin



arccos



arctan



Sats: Arcusfunktionernas egenskaper

Speciella vinklar

$\arcsin(0) = 0 \qquad \arccos(0) = \pi/2$

$\arcsin(1/2) = \pi/6 \qquad \arccos(1/2) = \pi/3$

$\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4 \qquad \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$

$\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3 \qquad \arccos(\sqrt{3}/2) = \pi/6$

$\arcsin(1) = \pi/2 \qquad \arccos(1) = 0$

Negativt argument

$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

$\arctan(-x) = -\arctan(x)$

Vinkelkomplementär identitet

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$

Exempel (i mån av tid):

(från introdugga 2016)

Låt $a = \log_3 2$. Bestäm $\log_9 8 + 3^a - \log_3 6$.

Alt 1:

$\log_9 8 = \frac{1}{2}\log_3 8 = \frac{1}{2}\log_3 2^3 = \frac{3}{2}\log_3 2 = \frac{3a}{2}$

$3^a = 2$

$\log_3 6 = \log_3(2\cdot 3) = \log_3 2 + \log_3 3 = a+1$

$\therefore \quad \frac{3a}{2} + 2 - a - 1 = \underline{\underline{\frac{a}{2} + 1}}$

Alt 2:

$\log_9 8 = \frac{\ln 8}{\ln 9} = \frac{\ln 2^3}{\ln 3^2} = \frac{3\ln 2}{2\ln 3}$

$3^a = 2$

$\log_3 6 = \frac{\ln 6}{\ln 3} = \frac{\ln(2\cdot 3)}{\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} + 1$

$\therefore \quad \frac{3\ln 2}{2\ln 3} + 2 - \frac{2\ln 2}{2\ln 3} - 1$

$= \frac{\ln 2}{2\ln 3} + 1 = \frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln 3} + 1 = \frac{1}{2}\log_3 2 + 1$

$= \frac{a}{2} + 1$