

* Idag: • Gränsvärde (AL 3.1)

• Kontinuitet (AL 3.2)

F07

3.1 Gränsvärde

Gränsvärde för talföljd:

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow \bar{x} \text{ då } n \rightarrow \infty \\ |x_n - \bar{x}| < \varepsilon \iff n \geq N \end{array} \right\}$$

Gränsvärde för funktion:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \bar{y} \text{ då } x \rightarrow \bar{x} \\ |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon \iff |x - \bar{x}| < \delta \end{array} \right\}$$

Definition: Gränsvärde

Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har gränsvärdet \bar{y} i punkten \bar{x}

om Notera!

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon$$

Skrivsätt:

1) $f(x) \rightarrow \bar{y}$ då $x \rightarrow \bar{x}$

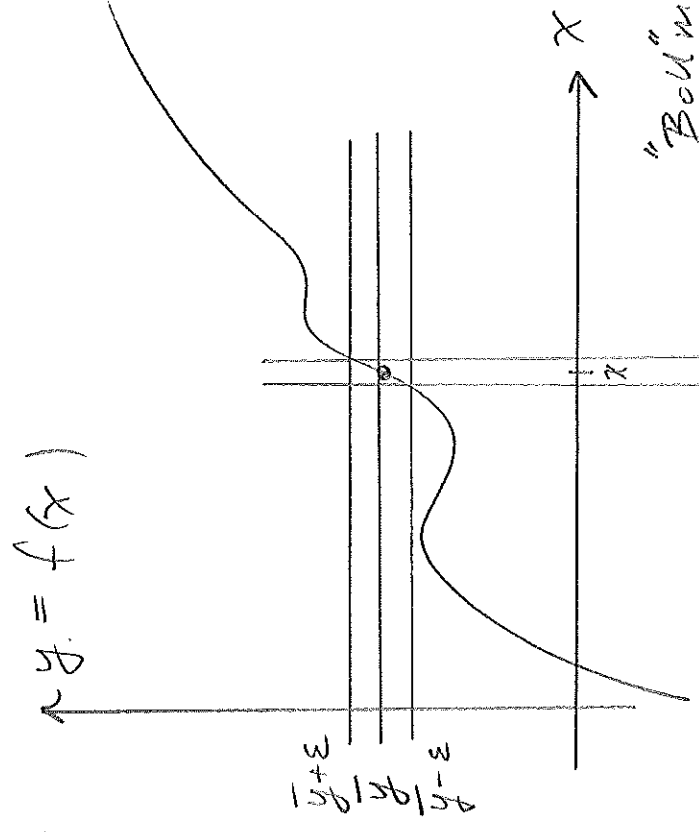
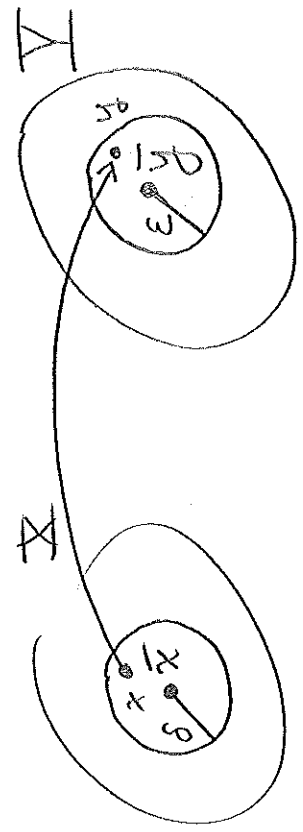
2) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{y}$

Notera:

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

(Egentligen $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}, f)$!)

Illustration:



$x \in B_\delta(\bar{x}) \Rightarrow y \in B_\epsilon(\bar{y})$

Exempel:

$f(x) = \frac{3x+5}{2x+2}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{8}{4} = 2$

Visa detta!

Låt $x = \bar{x} + \Delta x = 1 + \Delta x$

$\Rightarrow |f(x) - \bar{y}| = \left| \frac{3 \cdot (1 + \Delta x) + 5}{2 \cdot (1 + \Delta x) + 2} - 2 \right|$

$= \left| \frac{3 + 3\Delta x + 5}{4 + 2\Delta x} - \frac{2 \cdot (4 + 2\Delta x)}{4 + 2\Delta x} \right|$

$= \left| \frac{8 + 3\Delta x - 8 - 4\Delta x}{4 + 2\Delta x} \right| = \left| \frac{\Delta x}{4 + 2\Delta x} \right|$

$\leq \left\{ \text{Antag } |\Delta x| < 1 \right\} \leq \frac{|\Delta x|}{4 - 2}$

$= \frac{|\Delta x|}{2} < \epsilon, \text{ om } |\Delta x| < \underline{\underline{2\epsilon}}$

$\therefore \delta(\epsilon) = \min(1, 2\epsilon)$

Definition: Ensidigt gränsvärde

Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har högergränsvärdet \bar{y} i punkten \bar{x} om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x - \bar{x} < \delta \\ \Rightarrow |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon$$

Skrivsätt:

$$1) \quad f(x) \rightarrow \bar{y} \quad \text{då} \quad x \rightarrow \bar{x}^+$$

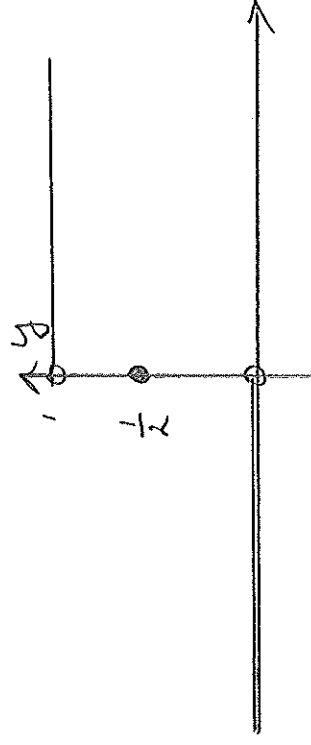
$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \bar{y}$$

På samma sätt ($x < \bar{x}$) definieras vänstergränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \bar{y}$$

Exempel: Heavisides stegfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ existerar ej!

(Varför?)

Definition: Oändligt gränsvärde,
gränsvärde i oändligheten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \bar{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \bar{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = -\infty$$

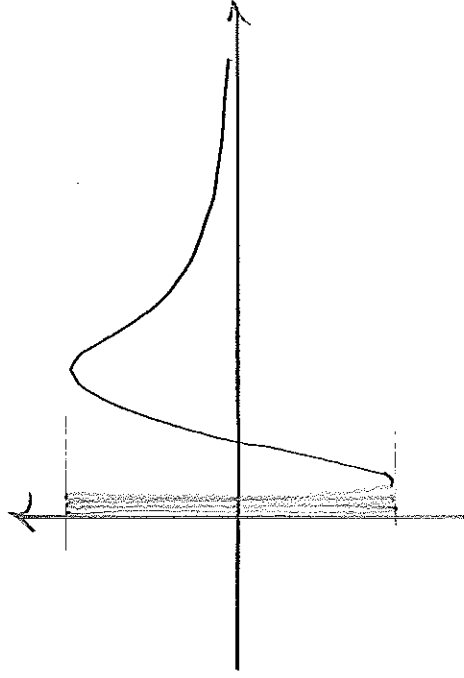
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (\pm), \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (\pm), \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \pm \infty$$

Se boken!

Exempel:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ existerar ej!}$$

Sats: Egenskaper för gränsvärden

Om $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{y} \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \bar{z} \end{array} \right.$

så gäller att

(i) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) + g(x)] = \bar{y} + \bar{z}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) - g(x)] = \bar{y} - \bar{z}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} [\alpha f(x)] = \alpha \bar{y}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x)g(x)] = \bar{y}\bar{z}$

(v) $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x)/g(x)] = \bar{y}/\bar{z}$

($\bar{z} \neq 0$)

Bevis: (av (i))

Enligt definition:

$$\left. \begin{array}{l} \exists \delta_f = \delta_f(\varepsilon) : 0 < |x - \bar{x}| < \delta_f \Rightarrow |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon \\ \exists \delta_g = \delta_g(\varepsilon) : 0 < |x - \bar{x}| < \delta_g \Rightarrow |g(x) - \bar{z}| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |f(x) + g(x) - (\bar{y} + \bar{z})| \\ &= |f(x) - \bar{y} + g(x) - \bar{z}| \\ &\leq |f(x) - \bar{y}| + |g(x) - \bar{z}| \quad \leftarrow \text{triangelolikheten} \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

om $|x - \bar{x}| < \delta_f(\varepsilon/2)$ och $|x - \bar{x}| < \delta_g(\varepsilon/2)$, där

$$|x - \bar{x}| < \delta = \min(\delta_f(\varepsilon/2), \delta_g(\varepsilon/2)).$$



3.2 Kontinuitet

Definition: Kontinuitet i en punkt

f kontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

(dvs om $\bar{y} = f(\bar{x})$)

Definition: Kontinuitet

f kontinuerlig om kontinuerlig i alla $x \in D(f)$

Notera:

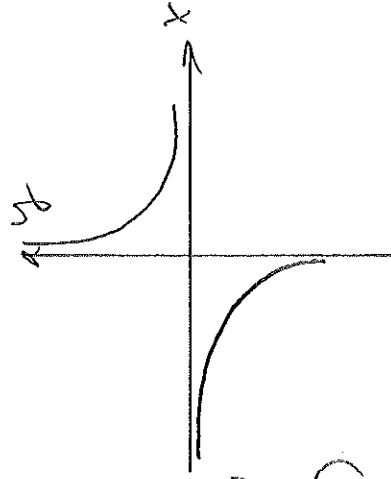
För en kontinuerlig funktion gäller alltid att

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \overbrace{f(x)}^{\rightarrow} = f(\bar{x}) = f\left(\lim_{x \rightarrow \bar{x}} x\right)$$

"lim kan flyttas in i parentesen"

Exempel:

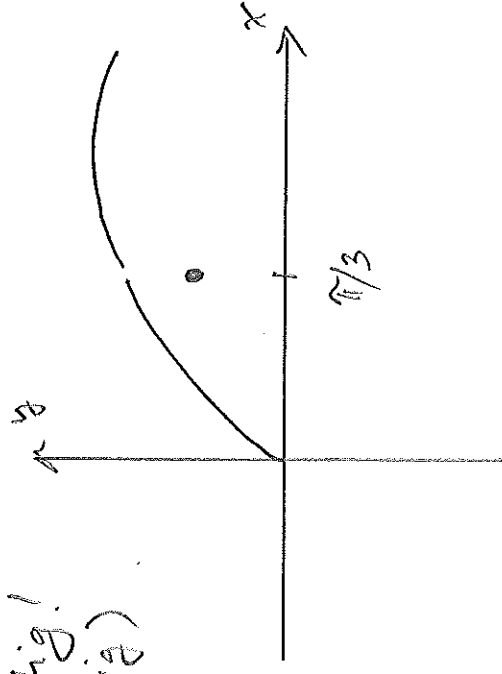
1) $f(x) = 1/x$



Kontinuerlig!
(men ej i $x=0$)

2) $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x < \pi/3 \\ 1/2, & x = \pi/3 \\ \sin(x), & x > \pi/3 \end{cases}$

Ej kontinuerlig!
(diskontinuerlig)



Definition: Ensidig kontinuitet

f högerkontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = f(\bar{x})$$

Sats: Egenskaper för kontinuerliga funktioner

Om f och g är kontinuerliga så är också följande funktioner kontinuerliga:

(i) $f + g$

(ii) $f - g$

(iii) αf

(iv) $f \cdot g$

(v) f/g

(vi) $f \circ g$

Bevis:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) + g(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x)$$

$$= f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = (f + g)(\bar{x})$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(g(x))$$

$$= f\left(\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x)\right) = f(g(\bar{x}))$$

$$= (f \circ g)(\bar{x}) \quad \square$$

Notera:

1) Alla ändliga algebraiska uttryck och sammansättningar av de elementära funktionerna.

2) $f = I - H$, $g = H \Rightarrow f + g = I$, kontinuerlig!