* **Idag:** • Symbolisk beräkning av gränsvärden (AL 3.5)

$\boxed{F09}$ • Numerisk beräkning av gränsvärden (AL 3.6)

3.5 Symbolisk beräkning av gränsv.

Om f kontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

Beräkning genom insättning!

Exempel:

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{\ln(\exp(-2x) + \cos(7x))}$$

Kontinuerlig? Ja! (Varför?)

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pi/2} f(x) = f(\pi/2)$$

$$= \frac{\sin(3\pi/2)}{\ln(\exp(-\pi) + \underbrace{\cos(7\pi/2)}_{=0})}$$

$$= \frac{-1}{\ln(\exp(-\pi))} = \frac{1}{\pi}$$

Exempel:

$$f(x) = \frac{5x^2 + 2x - 3}{5x - 3}$$

Kontinuerlig?

Ja, men inte i $\bar{x} = 3/5$.

$$\lim_{x \to 3/5} f(x) = ?$$

Notera:

$$f(3/5) = \frac{5 \cdot (3/5)^2 + 2 \cdot 3/5 - 3}{5 \cdot 3/5 - 3}$$

$$= \frac{9/5 + 6/5 - 15/5}{3 - 3}$$

$$= \frac{0}{0} = \text{ej definierat!}$$

Men: $5x^2+2x-3=0$ då $x=3/5$

$\Rightarrow$ har faktor $x-3/5$ (faktorsatsen)

$\Rightarrow$ har faktor $5x-3$

Polynomdivision ger

$$5x^2+2x-3=(5x-3)(x+1)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\cancel{(5x-3)}(x+1)}{\cancel{5x-3}}=\underbrace{x+1}_{=g(x)} \quad x\neq 3/5$$

$$\Rightarrow f(x)=g(x) \text{ för } x\neq 3/5$$

$$\lim_{x\to 3/5} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 3/5} g(x)=\frac{3}{5}+1}=\underline{\underline{\frac{8}{5}}}$$

g kontinuerlig i $\bar{x}=3/5$

$\Rightarrow$ gränsvärdet kan beräknas genom insättning

"0/0" som i exemplet är ett exempel på en <u>obestämd form</u>

Vi har 7 <u>obestämda former</u> som "ofta" dyker upp i gränsvärden:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \frac{0}{0} & \frac{\infty}{\infty} & 0\cdot\infty & \infty-\infty \\ 0^0 & 1^\infty & \infty^0 & \end{array}}$$

<u>Strategi</u>: Skriv om på formen 0/0 eller ∞/∞, faktorisera, logaritmera

Exempel: "$\infty - \infty$"

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2+x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$$

Obestämd form $\infty - \infty$ då $x \to \infty$.

Förläng med konjugatet:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2+x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1} + \sqrt{x^2+x+5}\right)}{\sqrt{x^2+2x-1} + \sqrt{x^2+x+5}}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 2x - 1 - (\cancel{x^2} + x + 5)}{\sqrt{x^2+2x-1} + \sqrt{x^2+x+5}}$$

$$= \frac{x-6}{\sqrt{x^2+2x-1} + \sqrt{x^2+x+5}} \quad \left(\to \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$$

$$= \frac{1 - 6/x}{\sqrt{1+2/x-1/x^2} + \sqrt{1+1/6+5/x^2}}$$

$$\to \frac{1-0}{\sqrt{1+0-0} + \sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{2}$$

då $x \to \infty$

Exempel: "1^∞"

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = ?$$

Obestämd form 1^∞ då $x \to \infty$.

Logaritmera:

$$f(x) = \exp(\ln(f(x)))$$

$$= \exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}\right)$$

$$= \exp\left(3x \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right)$$

$$= \{\text{Låt } y = 1/(2x)\} \Rightarrow x = 1/2y$$

$$= \exp\left(\frac{3}{2y} \ln(1+y)\right)$$

Obestämd form $\frac{0}{0}$ då $y \to 0$

$$= \exp\left(\frac{3}{2} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_{\to 1 \text{ då } y \to 0}\right)$$

Känt gränsvärde II

$$\to \underline{\underline{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}} \text{ då } x \to \infty$$

(se nästa sida)

Sats: Standardgränsvärden

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(x)} = 0$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$

(iii) $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = 0$

(iv) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

(v) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(vi) $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$

(vii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$(\alpha > 0)$

Bevis:

(v) $$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln\left((1+x)^{1/x}\right) = \{\text{Låt } y = 1/x\} = \ln\Big(\underbrace{\left(1+\tfrac{1}{y}\right)^y}_{\to e \text{ då } y\to\infty}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} \to \ln(e) = 1 \text{ då } x \to 0$$

(vi) $$x^x = \exp(\ln(x^x)) = \exp(\underbrace{x\ln x}_{\to 0 \text{ då } x\to 0+})$$

$$\Rightarrow x^x \to \exp(0) = 1 \text{ då } x \to 0+$$

$\blacksquare$

Styrkeförhållanden:

(i)–(ii) innebär att

exp <u>starkare än</u> x^α <u>starkare än</u> ln

3.6 Numerisk beräkning av gränsvärden

- Symbolisk beräkning bygger på "trick"
- Numerisk beräkning generell men ger approximativt svar

Utgångspunkt: Tabell av mätvärden

h	H	$H/2$	$H/4$	$\cdots$	$H/2^N$
$x=\bar{x}+h$	$\bar{x}+h$	$\bar{x}+H/2$	$\bar{x}+H/4$	$\cdots$	$H/2^N$
$f(x)$	$\underbrace{f(\bar{x}+H)}_{=\bar{y}_0}$	$f(\bar{x}+H/2)$ $=\bar{y}_1$	$f(\bar{x}+H/4)$	$\cdots$	$f(\bar{x}+H/2^N)$

Mål: Beräkna

$$\bar{y} = \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\bar{x}+h)$$

Antagande:

$$f(x) \approx \bar{y} + Ch^{r}$$

r – konvergensordning

Ger (approximativt)

$$y_0 = f(\bar{x}+H) = \bar{y} + CH^r \qquad (1)$$

$$y_1 = f\left(\bar{x}+\frac{H}{2}\right) = \bar{y} + C\left(\frac{H}{2}\right)^r \qquad (2)$$

$$= \bar{y} + CH^r \cdot 2^{-r}$$

Vill bestämma $\bar{y}$.
C och r också okända.
Om vi vet r kan vi beräkna $\bar{y}$ (och C) från (1) och (2).

$$y_0 = \bar{y} + CH^r$$

$$2^r y_1 = 2^r \bar{y} + CH^r$$

$$\Rightarrow 2^r y_1 - y_0 = (2^r - 1)\bar{y}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{2^r y_1 - y_0}{2^r - 1}$$

$$\overset{r=2}{\Longrightarrow} \boxed{\bar{y} = \frac{4y_1 - y_0}{3}}$$

Richardson-extrapolation

Om r inte är känd kan vi beräkna $\bar{y}, C, r$ från 3 ekvationer:

$$A = CH^r, \quad \beta = 2^r$$

$$\begin{cases} y_0 = \bar{y} + A & (1) \\ y_1 = \bar{y} + A/\beta & (2) \\ y_2 = \bar{y} + A/\beta^2 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow \quad A = y_0 - \bar{y}$

$(2) \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{A}{y_1 - \bar{y}} = \dfrac{y_0 - \bar{y}}{y_1 - \bar{y}}$

$(3) \Rightarrow \quad y_2 = \bar{y} + \dfrac{(y_1 - \bar{y})^2}{y_0 - \bar{y}}$

$$(y_0 - \bar{y})\, y_2 = \bar{y} \cdot (y_0 - \bar{y}) + (y_1 - \bar{y})^2$$

$$y_0 y_2 - \bar{y} y_2 = \bar{y} y_0 - \cancel{\bar{y}^2} + y_1^2 + \cancel{\bar{y}^2} - 2 y_1 \bar{y}$$

$$y_0 y_2 - y_1^2 = (y_0 - 2y_1 + y_2) \cdot \bar{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{y_0 y_2 - y_1^2}{y_0 - 2y_1 + y_2}}$$

Konvergensordning:

$$2^r = \beta = \frac{y_0 - \bar{y}}{y_1 - \bar{y}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln(2^r)}_{= r \ln 2} = \ln\left(\frac{y_0 - \bar{y}}{y_1 - \bar{y}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \ln\left(\frac{y_0 - \bar{y}}{y_1 - \bar{y}}\right) \Big/ \ln 2}$$

Notera:

Här värdena y_0, y_1, y_2 men använd på de tre senaste i en mätserie.

Algoritm: Richardson-extrapolation

for $n = 2, 3, \dots, N$

$$\bar{y}_n = \frac{y_{n-2}y_n - y_{n-1}^2}{y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n}$$

$$r_n = \ln\left(\frac{y_{n-2} - \bar{y}}{y_{n-1} - \bar{y}}\right) \Big/ \ln 2$$

end

Ger tabell:

y	$\bar{y}$	r
y_2	$\bar{y}_2$	r_2
y_3	$\bar{y}_3$	r_3
y_4	y_4	r_4
y_5	$\bar{y}_5$	r_5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_N	$\bar{y}_N$	r_N

Avrundningsfel gör värdena opålitliga efter ett tag

Indikeras av "märkliga" r-värden

Se boken för ett exempel!