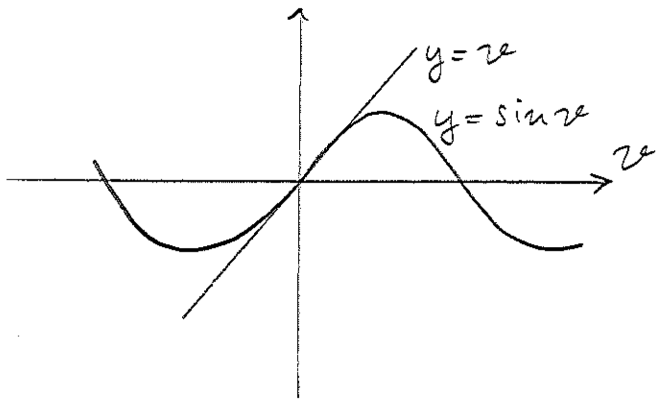
* **Idag:** $\boxed{F11}$ Derivator av trig. funktioner, högre derivator, implicit derivering, numerisk derivata (Kap 4)

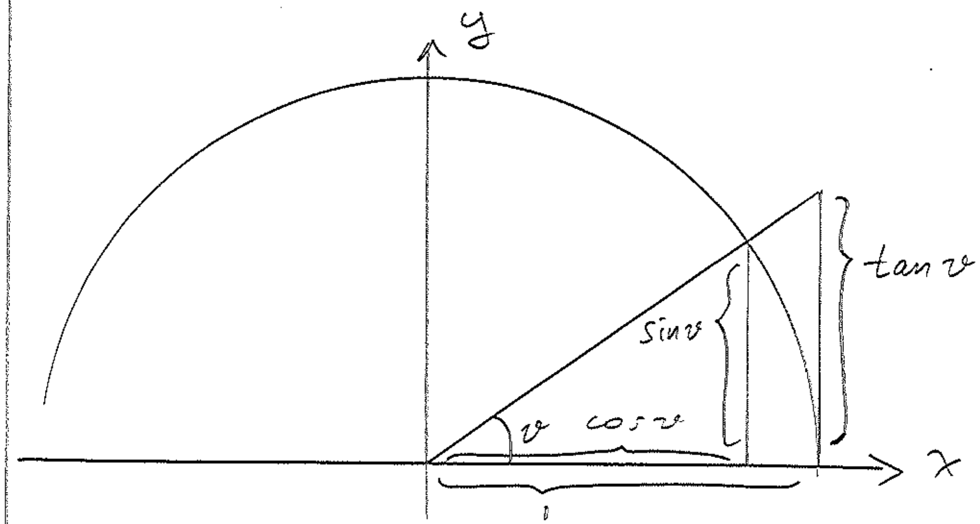
Vi skall beräkna derivatan av sin, cos, tan, och kommer då att behöva följande viktiga gränsvärde:

Sats:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin v}{v} = 1$$



Bevis:



Jämförelse av areor ger

$$\frac{\sin v \cdot \cos v}{2} < \frac{v}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 < \frac{1 \cdot \tan v}{2}$$

$$\sin v \cdot \cos v < v < \frac{\sin v}{\cos v}$$

$$\cos v < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$

$$\underbrace{\cos v}_{\leq 1} < \frac{\sin v}{v} < \underbrace{\frac{1}{\cos v}}_{\geq 1}$$

$$\to 1 \qquad\qquad \to 1$$

Instängningsregeln för gränsvärden ger $\lim_{v \to 0} \frac{\sin v}{v} = 1$

* Sats: $\sin' = \cos$

Bevis:

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to ?} \cdot \sin x + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1}$$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 h} - 1}{h} = \frac{(\sqrt{1-\sin^2 h} - 1)(\sqrt{1-\sin^2 h} + 1)}{h \cdot (\sqrt{1-\sin^2 h} + 1)}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 h - 1}{h \cdot (\sqrt{1-\sin^2 h} + 1)} = \underbrace{-h}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 h} + 1}}_{\to 1/2} \to 0$$

$$\therefore \quad f'(x) = 0 \cdot \sin x + \cos x \cdot 1$$

$$= \underline{\underline{\cos x}}$$

■

* Sats: $\cos' = -\sin$

Bevis:

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x = \cos(\pi/2 - x)(-1)$$

kedjeregeln

$$= \sin x \cdot (-1) = -\sin x.$$

■

Slutligen kan vi nu beräkna derivatan av tan.

* Sats: $\tan' = 1/\cos^2$

Bevis: Produktregeln ger

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

■

* Övning: Visa att derivatan av $\arcsin x$ ges av $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ledning: Implicit derivering! (se nedan)

* Högre ordningens derivator

$$f \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f' = f^{(1)} = Df$$

$$f' \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f'' = f^{(2)} = D^2 f$$

$$f'' \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f''' = f^{(3)} = D^3 f$$

$$\cdots$$

$$f \longrightarrow \boxed{D^n} \longrightarrow f^{(n)} = D^n f$$

Notera:

- Om f är n gånger deriverbar så är $f^{(n-1)}$ kontinuerlig.
- Men $f^{(n)}$ behöver ej vara kontinuerlig. (Exempel: $|x|$)

* Funktionsrum

$C([a,b]) = \{$kontinuerliga funktioner på $[a,b]\}$

$C^1([a,b]) = \{$kontinuerligt deriverbara funktioner på $[a,b]\}$

$= \{f : f' \in C([a,b])\}$

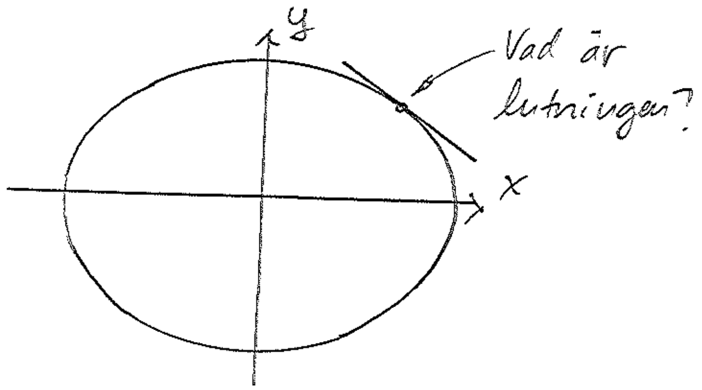
$C^n([a,b]) = \{f : f^{(n)} \in C([a,b])\}$

$C^\infty([a,b]) = \{f : f \in C^n([a,b]) \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

"glatta" eller "släta" funktioner

Exempel: polynom, sin, cos

* Implicit derivering (exempel)



Ellips beskrivs av ekvationen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Metod 1: Lös ut $y = f(x)$

$$y^2/b^2 = 1 - (x/a)^2$$

$$y = \underset{(-)}{+}\, b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad y' = b \cdot \frac{1}{\cancel{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(-\cancel{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$$

$$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{x/a}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$$

Metod 2: Implicit derivering

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx} VL = \frac{d}{dx} HL$$

$$\cancel{2} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} + \cancel{2} \cdot \frac{y}{b} \cdot y' \cdot \frac{1}{b} = 0$$

$$\frac{y}{b} \cdot y' \cdot \frac{1}{b} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{x}{a}$$

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x/a}{\underbrace{y/b}_{= \sqrt{1-(x/a)^2}}}$$

* Numerisk derivata

Derivatan $f'(x)$ kan approximeras med differenskvoten

$$D_h f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$$

- Hur litet skall h vara?
- Ju mindre desto bättre?

Vi kommer längre fram i kursen (fredag!) att visa att felet ges av

("discretization error")

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leq \underbrace{\frac{h}{2} \cdot |f''|}_{\to 0 \text{ då } h \to 0} = E_D$$

Men: När differenskvoten beräknas numeriskt (i MATLAB) tillkommer också ett avrundningsfel (beräkningsfel):

$$\left| \overset{\text{Flyttalsevaluering}}{fl}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

$$\lesssim \frac{2 \cdot \varepsilon_{mach} \cdot |f(x)|}{h} = E_C$$

("computational error")

Det totala felet ges då av

$$|fl(D_h f) - f'|$$

$$= |fl(D_h f) - D_h f + D_h f - f'|$$

$$\leq |fl(D_h f) - D_h f| + |D_h f - f'| \leq$$

$$\leq E_C + E_D = \frac{2 \varepsilon_{mach} \cdot |f|}{h} + \frac{h}{2} |f''|$$

ökar om h minskar

minskar om h minskar

$\Rightarrow$ Måste finnas ett optimalt h!

Finn minimum av

$$E(h) = \frac{2\varepsilon_{mach} \cdot |f|}{h} + \frac{h}{2}|f''|$$

$$E'(h) = -\frac{2\varepsilon_{mach}|f|}{h^2} + \frac{1}{2}|f''| = 0$$

$$\frac{1}{2}|f''| = \frac{2\varepsilon_{mach}|f|}{h^2}$$

$$h^2 = \frac{4\varepsilon_{mach}|f|}{|f''|}$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{\frac{|f|}{|f''|}} \cdot \sqrt{\varepsilon_{mach}}$$

$$\sim \sqrt{\varepsilon_{mach}} \sim \underline{\underline{10^{-8}}}$$