* <u>Idag:</u> Extremvärdesproblem
$\boxed{F13}$ Taylors formel
(svårt bevis!)

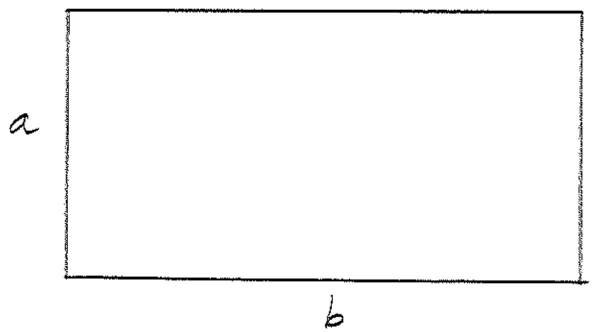
(Kap 5)

* Extremvärdesproblem

- Direkt tillämpning av extremvärden (förra föreläsningen)
- Textbaserade problem

<u>Exempel:</u>

Maximera arean av en rektangel med given omkrets!




Samband: $L = 2a + 2b$

$A = a \cdot b$

$a > 0$

$b > 0$

Lös ut $b$:

$$b = \frac{L-2a}{2} = \frac{L}{2} - a$$

$$\Rightarrow A(a) = a \cdot b = a \cdot \left(\frac{L}{2} - a\right) = \frac{L}{2} \cdot a - a^2$$

Undersök:

- Ändpunkter: $a = 0$, $a = L/2$
- Kritiska punkter: $A'(a) = 0$
- Singulära punkter: saknas

$\left.\begin{array}{l} A(0) = 0 \\ A(L/2) = 0 \end{array}\right\}$ ej maximum i ändpunkterna

$0 = A'(a) = \frac{L}{2} - 2a \Leftrightarrow a = L/4$ (kvadrat!)

$A''(a) = -2 < 0 \Rightarrow$ <u>maximum</u> för kvadrat

* Taylors formel

- Linjär approximation (linearisering):

$$f(x) \approx \underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})}_{\text{Första ordningens Taylor-utveckling}}$$

- Kvadratisk approximation

$$f(x) \approx \underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \tfrac{1}{2} f''(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})^2}_{\text{Andra ordningens Taylor-utveckling}}$$

- n:e ordningens approximation:

$$\begin{aligned} f(x) \approx\ & f(\bar{x}) \\ &+ f'(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x}) \\ &+ \tfrac{1}{2} f''(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})^2 \\ &+ \tfrac{1}{6} f'''(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})^3 + \ldots + \\ &+ \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})^n \end{aligned}$$

Exempel: $f(x) = e^x$, $\bar{x} = 0$, $n = 2$

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots$

$f(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1, \ldots$

$$\Rightarrow e^x \approx 1 + 1 \cdot (x-0) + \tfrac{1}{2}(x-0)^2$$
$$= 1 + x + x^2/2$$

Exempel: $f(x) = \sin x$, $\bar{x} = 0$, $n = 3$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$

$$\Rightarrow \sin x \approx 0 + 1 \cdot (x-0) + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x-0)^2 + \tfrac{1}{6} \cdot (-1) \cdot (x-0)^3$$
$$= x - x^3/6$$

* Definition: Taylor-polynom

n:e ordningens Taylor-polynom för funktionen $f$ runt punkten $\bar{x}$ ges av

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})^k$$

* Definition: Maclaurin-polynom

Taylor-polynom med $\bar{x}=0$

* Sats: Taylors sats

Om funktionen $f$ är $(n+1)$ gånger deriverbar på $[\bar{x}, x]$ (eller $[x, \bar{x}]$) så gäller att

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \quad x \in [\bar{x}, x]$$

där resttermen $E_n(x)$ ges av

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\bar{x})^{n+1}$$

$(\xi \in (\bar{x}, x))$

Notera:

- Medelvärdessatsen för $n=0$
- $E_n(x) \to 0$ då $x \to \bar{x}$
- Resttermen av samma typ som övriga termer

Lemma: Generaliserade medelvärdessatsen

Om $f$ och $g$ är kontinuerliga på $[a,b]$ och deriverbara på $(a,b)$, och $g'(x) \neq 0$ på $(a,b)$. Då gäller att

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Obs! Samma $\xi$!

för något $\xi \in (a,b)$

Bevis: (ingår ej i kursen)

Låt

$$h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot (g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a)) \cdot (f(x) - f(a))$$

$$h(a) = h(b) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \, \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) - (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad \blacksquare$$

Notera:

Om $f(a) = g(a) = 0$ så gäller att

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (*)$$

Bevis: (Av Taylors sats)

Bevisidé: Matematisk induktion

(i) Visa att formeln gäller för $n=0$

(ii) Visa att om formeln gäller för $n = \bar{n} - 1$, så gäller den också för $n = \bar{n}$.

(iii) $\Rightarrow$ Gäller för alla $n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

(i) $n = 0$ ger

$$f(x) = P_0(x) + E_0(x)$$

$$= \frac{1}{0!} f^{(0)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(\xi) \cdot (x - \bar{x})^1$$

$$= f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

Medelvärdessatsen!

$\therefore$ Gäller för $n = 0$.

(ii) Antag att formeln gäller för $n = \bar{n} - 1$.

Vill visa att

Detta skall visas!

$$E_{\bar{n}}[f](x) \equiv f(x) - \sum_{k=0}^{\bar{n}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^k = \frac{1}{(\bar{n}+1)!} f^{(\bar{n}+1)}(\xi) \cdot (x - \bar{x})^{\bar{n}+1} .$$

Använd formeln på funktionen $f'$:

Detta är vårt induktionsantagande!

$$E_{\bar{n}-1}[f'](x) \equiv f'(x) - \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^k = \frac{1}{\bar{n}!} f^{(\bar{n}+1)}(\xi) \cdot (x - \bar{x})^{\bar{n}}$$

Notera:

$$E_{\bar{n}-1}[f'](x) = E_{\bar{n}}'[f](x),$$

ty

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\bar{n}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) (x - \bar{x})^k = \sum_{\underbrace{k=1}_{\text{notera! derivatan för } k=0 \text{ är } 0}}^{\bar{n}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot k \cdot (x - \bar{x})^{k-1} = \sum_{k=1}^{\bar{n}} \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(\bar{x}) (x - \bar{x})^k$$

Från vårt lemma (formeln (*)) följer att

$$\frac{E_{\bar{n}}[f](x)}{(x-\bar{x})^{\bar{n}+1}} = \frac{E'_{\bar{n}}[f](\eta)}{(\bar{n}+1)\cdot(\eta-\bar{x})^{\bar{n}}} = \frac{E_{\bar{n}-1}[f'](\eta)}{(\bar{n}+1)\cdot(\eta-\bar{x})^{\bar{n}}}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\bar{n}}[f](x) = (x-\bar{x})^{\bar{n}+1} \cdot \frac{1}{(\bar{n}+1)\cdot\cancel{(\eta-\bar{x})^{\bar{n}}}} \cdot \frac{1}{\bar{n}!} f^{(\bar{n}+1)}(\xi)\cdot\cancel{(\eta-\bar{x})^{\bar{n}}}$$

$$= \frac{1}{(\bar{n}+1)!} f^{(\bar{n}+1)}(\xi)\cdot(x-\bar{x})^{\bar{n}+1}.$$

$\therefore$ Formeln gäller för $n=\bar{n}$.

(iii) Med induktion följer att formeln gäller för $n=0,1,2,3,\ldots$

> Med hjälp av integraler och partiell integration kan man bevisa Taylors sats lite enklare...