* **Idag:** • Konvergenstester för serier

$\boxed{F14}$ (Kap 5)

* När konvergerar en serie?

Använd konvergenstester tillsammans med kända serier.

Konvergenstester: (verktygslåda)

- Term-test
- Konvergens eller divergens
- (Integraltest)
- Jämförelsetest I + II
- Kvottest
- (Rottest)
- Absolutkonvergens
- Alternerande serie

$\left.\begin{array}{l}\text{Konvergens eller divergens}\\ \text{(Integraltest)}\\ \text{Jämförelsetest I + II}\\ \text{Kvottest}\\ \text{(Rottest)}\end{array}\right\}$ För positiva serier

Kända serier:

Detta visade vi på intromatten!

- Geometrisk serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \ldots$$

konvergerar mot $\frac{1}{1-r}$ om $|r|<1$

(annars divergent)

- Harmonisk serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

divergent! (Följer från integraltest och $\ln \infty = \infty$)

- p-serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerar om $p > 1$

* Några viktiga definitioner innan vi presenterar konvergenstesterna:

<u>Definition:</u> Absolutkonvergent

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är <u>absolutkonvergent</u> om serien $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ är konvergent.

<u>Definition:</u> Villkorligt konvergent

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är <u>villkorligt konvergent</u> om den är konvergent men inte absolutkonvergent.

* <u>Sats:</u> Term-test

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow a_n \to 0$

<u>Bevis:</u>

$$a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n - \sum_{n=1}^{n-1} a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$$

ty $S_n \to S$ och $S_{n-1} \to S$. ▨

<u>Exempel:</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ divergerar, ty $\ln n \not\to 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar, <u>trots att</u> $\frac{1}{n} \to 0$

* Sats: Konvergens eller divergens

En positiv serie är antingen konvergent eller divergerar mot ∞.

Bevis:

Om serien ej divergerar mot ∞ så är talföljden $\{s_n\}$ uppåt begränsad och växande, och därmed konvergent. ∎

* Sats: Jämförelsetest I

Om $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är två talföljder och (slutligen) $\underbrace{0 \le a_n \le K b_n}$ för något $K > 0$, så gäller att (således slutligt positiva)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvervgerar

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar mot $+\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar mot $+\infty$

(Bevis)

Exempel:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ konvergent, ty

$\frac{1}{2^n+1} \le \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ och $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ är konvergent geometrisk serie

* Sats: Jämförelsetest II

Om $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ är positiva talföljder och

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

där $L \in [0,\infty)$ eller $L = +\infty$, så:

(i) $L < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(ii) $L > 0$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerar

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerar

(Bevis)

Exempel:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ konvergerar?

Jämför med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ som divergerar.

(p-serie med $p = \frac{1}{2}$)

$$a_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/(1+\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1} \to 1$$

Jämförelsetest II ger att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ divergerar.

* **Sats:** Kvottest

Om $\{a_n\}$ är (slutligt) positiv och

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

där $\rho \in [0,\infty)$ eller $\rho = +\infty$, så:

(i) $0 \le \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar

(ii) $1 < \rho \le \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ och} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerar mot } \infty \end{cases}$

(iii) $\rho = 1 \Rightarrow$ antingen konvergent eller divergent

Bevis: (av (i))

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho < 1$$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1$ för något r då $n \geq N$ för något N

(tag $N = N(\varepsilon)$ för $\varepsilon = (1-\rho)/2$)

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \cdot r$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{M} a_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{M} a_n \le \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \underbrace{\sum_{n=N}^{M} a_{N-1} \cdot r^{n-N}}$$

Geometrisk serie, konvergent, ty $|r| < 1$.

$\Rightarrow$ Konvergent enligt jämförelsetest I.

* Sats: Absolutkonvergenstest

Absolutkonvergens $\Rightarrow$ konvergens

* Sats: Alternerande test

Om för något $N>0$

(i) $a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall\ n \geq N$

(ii) $|a_{n+1}| \leq |a_n| \quad \forall\ n \geq N$

(iii) $a_n \to 0$

så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Dessutom:

$$|s - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

* Notera: Om termerna i en absolutkonvergent serie flyttas om så konvergerar serien mot samma sak.

Termerna i en villkorligt konvergent serie kan flyttas runt så att den divergerar.

Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$$

Utred konvergens, absolutkonvergens och villkorlig konvergens för olika x!

$$a_n = \frac{(x-5)^n}{n \cdot 2^n}$$

- Ofta bra att börja med kvottest för att testa absolutkonvergens:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|(x-5)^{n+1}/((n+1)\cdot 2^{n+1})|}{|(x-5)^n/(n\cdot 2^n)|} = |x-5|\cdot\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = |x-5|\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2} \to \frac{|x-5|}{2} = \rho$$

Enligt kvottestet

$\Rightarrow$ Absolutkonvergent för $\frac{|x-5|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$.
(Därför också konvergent då $3 < x < 7$.)

- Om $x < 3$ eller $x > 7$ får vi

$$|a_n| = \frac{|x-5|^n}{n\cdot 2^n} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{|x-5|}{2}\right)^n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Divergent för $x<3$ eller $x>7$ enligt termtestet.

- Kvar att undersöka: $x=3$, $x=7$

$x=3 \Rightarrow a_n = \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow$ Villkorligt konvergent enligt alternerande test (ty ej absolutkonvergent)

$x=7 \Rightarrow a_n = \frac{\cancel{2^n}}{n\cdot \cancel{2^n}} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ Divergent enligt p-serie för $p=1$

- Slutsats: Absolutkonvergent (och därmed konvergent) på $(3,7)$, villkorligt konvergent i $x=3$, divergent överallt annars.