* Idag: • Potensserier
• Taylorserier

$\boxed{F15}$

(Kap 5)

* Definition: Potensserie ("power series")

En serie på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\bar{x})^n$$

kallas för potensserie runt $x=\bar{x}$.

$\{a_n\}$ kallas seriens koefficienter.

* Central fråga: När konvergerar en potensserie? För vilka x?

Svaret ges av följande sats.

Notera: Konvergerar trivialt i punkten $x=\bar{x}$.

* Sats: Potensseriers konvergens

För alla potensserier måste ett av följande alternativ gälla:

(i) Konvergerar endast i $x=\bar{x}$

(ii) Konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$

(iii) Konvergerar för $|x-\bar{x}| < R$ för något R (konvergensradien) och divergerar för $|x-\bar{x}| > R$.

För $|x-\bar{x}| = R$ (de två ändpunkterna) kan serien antingen konvergera eller divergera (ej nödvändigtvis samma i båda ändpunkterna).

I alla dessa fall (förutom i ändpunkterna) är eventuell konvergens alltid absolut.

Bevis:

Räcker att visa att om serien konvergerar i någon punkt $\tilde{x} \neq \bar{x}$, så konvergerar den (absolut) i alla punkter som ligger närmare $\bar{x}$, dvs $|x-\bar{x}| < |\tilde{x}-\bar{x}|$.

(Logiken här är: antingen inga ($x=\bar{x}$), alla ($x \in \mathbb{R}$) eller några x, och om det är några så måste det vara ett intervall $(\bar{x}-R, \bar{x}+R)$ för något R.)

Antag: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\tilde{x}-\bar{x})^n$ konvergerar

$\Rightarrow \quad a_n(\tilde{x}-\bar{x})^n \to 0$ enligt termtestet

$\Rightarrow \quad |a_n(\tilde{x}-\bar{x})^n| \leq K \;\; \forall n$ för något K

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-\bar{x})^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n(\tilde{x}-\bar{x})^n|}_{\leq K} \cdot \underbrace{\left|\frac{x-\bar{x}}{\tilde{x}-\bar{x}}\right|^n}_{=r^n,\ r<1}$$

$$\leq K \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{K}{1-r} < \infty$$

$\therefore$ Konvergerar absolut. $\blacksquare$

Exempel:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

← Geometrisk summa!

$a_n = 1 \;\forall n$, $\bar{x} = 0$

Konvergerar för $x \in (-1,1)$,

dvs centrum $\bar{x}=0$ och konvergensradie $R=1$.

* Att hitta konvergensradien R

Använd kvottestet:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\cdot(x-\bar{x})^{n+1}}{a_n \cdot (x-\bar{x})^n} \right|$$

$$= |x-\bar{x}| \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{=L}$$

$$= |x-\bar{x}| \cdot L$$

Konvergerar (absolut) då $\rho < 1$, dvs

$$|x-\bar{x}| < \frac{1}{L} = R.$$

Exempel: Bestäm centrum $\bar{x}$ och konvergensradie R för serien

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}$$

Skriv om:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot (x+\frac{5}{2})^n}{3^n \cdot (n^2+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}}_{a_n} \cdot \Big(x - \underbrace{\left(-\tfrac{5}{2}\right)}_{\bar{x}}\Big)^n$$

Kvottest:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \to \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ Konvergerar för $x \in \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) = (-4, -1)$.

(Konvergerar också för $x = -4$ och $x = -1$.)

* **Sats:** Egenskaper för potensserier

(i) $$\sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Samma konvergensradie

(ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$$

(iii) $$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^n$$

Samma konvergensradie

(iv) $$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n$$

Samma konvergensradie

* Exempel: Bestäm en potensserie för $\frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

för $-1 < x < 1$.

* Definition: Taylorserie

Om funktionen f är slät (dvs oändligt deriverbar) i en omgivning till $x=\bar{x}$ så kallas serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\bar{x})\cdot(x-\bar{x})^n$$

Taylor-serien till f runt $x=\bar{x}$.

Notera:

- Om $\bar{x}=0$ kallas det Maclaurin-serie
- Serien är ett "oändligt Taylor-polynom"
- Serien är en potensserie
- Konvergerar därför inom en konvergensradie R, där $R=0$, $R\in(0,\infty)$ eller $R=\infty$
- Behöver inte konvergera mot $f(x)$!
- Om en potensserie $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\bar{x})^n$ konvergerar i $\bar{x}$, så gäller att en omgivning till

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-\bar{x})^n}_{g(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot n(x-\bar{x})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad g'(\bar{x}) = a_1$$

På samma sätt kan man visa (Adams Theorem 21 i kap 9.6) att

$$a_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}(\bar{x}).$$

Funktion f $\longrightarrow$ Taylor f $= f$? ← Ja, om analytisk

Potensserie $\longrightarrow$ Funktion g $\longrightarrow$ Taylor $g = g$

Om den konvergerar

Alltid analytisk

- En funktion f vars Taylor-serie (g) runt $x = \bar{x}$ konvergerar mot f i en omgivning till $\bar{x}$ kallas <u>analytiska</u>.

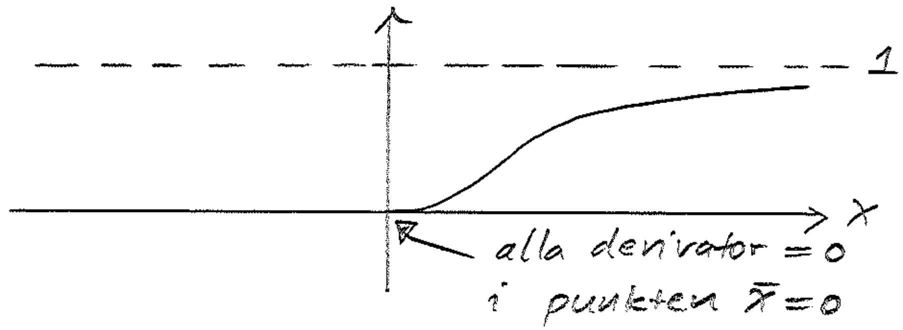
<u>Exempel:</u>

Polynom, exp, ln, sin, cos, ...
är analytiska

<u>Exempel:</u>

Funktionen $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

är slät (kontinuerliga derivator av alla ordningar) men är inte analytisk.
(Taylor-serien runt $\bar{x} = 0$ är 0.)



*Några kända Maclaurin-serier (att kunna!)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1)$$

$$\left(\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1,1] \right)$$

$$\left(\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1,1] \right)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

Övning: Skriv ett program för att beräkna π med (ca) 10 decimaler baserat på Maclaurin-utvecklingen av $\tan^{-1}$.

* Exempel: Bestäm Maclaurin-serien för

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x^2 = \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}$$