* **Idag:** Relaterade hastigheter
l'Hôpitals regel (regler)
Extremvärden

$\boxed{F19}$ (Kap 7)

* Relaterade hastigheter

- Samband mellan två tidsberoende funktioner
- Derivera m.a.p. t för att få fram ett samband mellan tidsderivatorna

(Påminner om implicit derivering!)

Exempel: Relatera hastigheten för ökningen av volymen $\dot{V}(t)$ för en står med hastigheten för ökningen av radien $\dot{r}(t)$. (En ballong som blåses upp.)

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

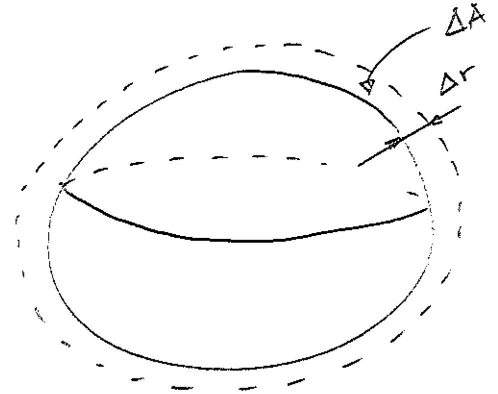
$$\Rightarrow \dot{V} = \frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot \pi r^2}{3} \cdot \dot{r} =$$

$$= \underbrace{4\pi r^2}_{=A} \cdot \dot{r}$$

$$\therefore \quad \dot{V}(t) = A(t) \cdot \dot{r}(t)$$

$$\left(\Delta V \approx A \cdot \Delta r \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} \approx A \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} \right)$$



* Obestämda former
("indeterminate forms")

	Typ	Exempel
1.	$0/0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (=1)$
2.	∞/∞	$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x^2)}{\cot(x^2)} \quad (=0)$
3.	$0\cdot\infty$	$\lim_{x\to 0+} x\cdot \ln\frac{1}{x} \quad (=0)$
4.	$\infty-\infty$	$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \quad (=0)$
5.	0^0	$\lim_{x\to 0+} x^x \quad (=1)$
6.	∞^0	$\lim_{x\to(\pi/2)-} (\tan x)^{\cos x} \quad (=1)$
7.	1^∞	$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (=e)$

Lösningsmetod: Skriv om på formen $0/0$ eller ∞/∞ och använd l'Hôpitals regler, (möjligtvis i kombination med logaritmer)

* <u>Sats:</u> l'Hôpitals regel I ("0/0")

Om f och g är deriverbara på (a,b) och

(i) $g'(x) \neq 0$ på (a,b)

(ii) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$

(iii) gränsvärdet $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ existerar

så gäller att

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

Notera: Motsvarande gäller för

$x \to b-$

$x \to \pm\infty$

Exempel: Beräkna $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \exp\left(x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \exp \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \exp \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}$$

$$= \exp \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$$

$$= \exp \lim_{y\to 0} \frac{1/(1+y)}{1} = \exp(1) = \underline{\underline{e}}$$

$\longleftarrow$ Vi har sett detta kända standardgränsvärde tidigare (kap 3)!

* Sats: l'Hôpitals regel II (∞/∞)

Om f och g är deriverbara på (a,b) och

(i) $g'(x) \neq 0$ på (a,b)

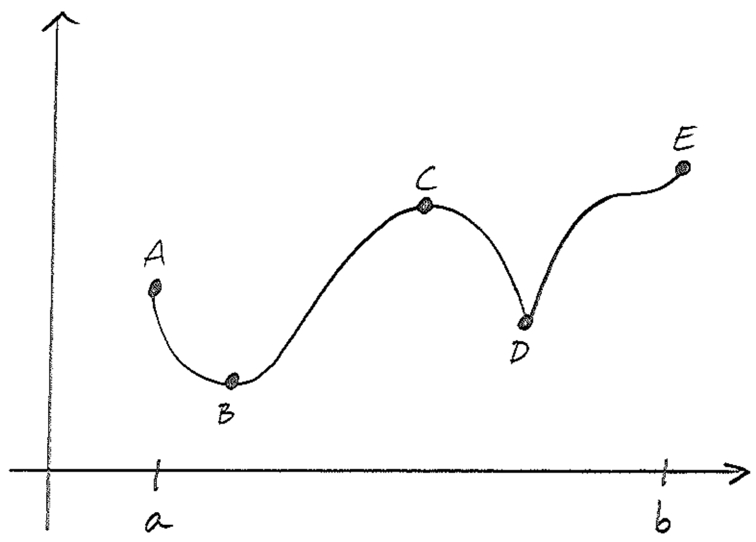
(ii) $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$

(iii) gränsvärdet $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ existerar

så gäller att

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

* Extremvärden (maximum och minimum)



A : lokalt maximum, ändpunkt

B : lokalt minimum, globalt minimum, kritisk punkt

C : lokalt maximum, kritisk punkt

D : lokalt minimum, singulär punkt

E , lokalt maximum, globalt maximum, ändpunkt

* Definition: globalt maximum/minimum

$\bar{x}$ är ett globalt maximum för funktionen f på intervallet I om

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in I.$$

$\bar{x}$ är ett globalt minimum för funktionen f på intervallet I om

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

* Definition: lokalt maximum/minimum (ext)

$\bar{x}$ är ett lokalt maximum för funktionen f om

$$\exists h > 0 : \quad f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x}-h, \bar{x}+h)$$

$\bar{x}$ är ett lokalt minimum för funktionen f om

$$\exists h > 0 : \quad f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x}-h, \bar{x}+h)$$

Hitta globala extremvärden:

Undersök alla lokala extremvärden!

Hitta lokala extremvärden:

Undersök alla

- kritiska punkter ($f' = 0$)
- singulära punkter (f' ej definierad)
- ändpunkter

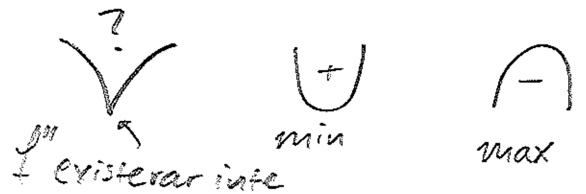
Maximum eller minimum:

Undersök

- teckenväxling för f'

eller

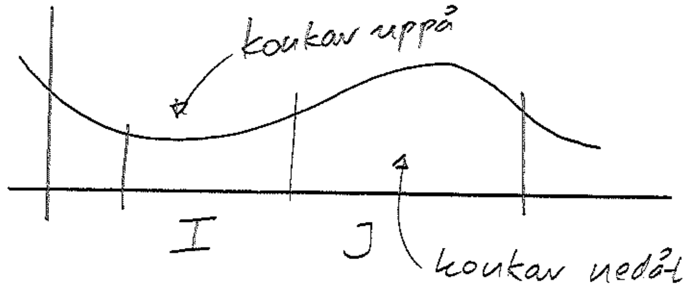
- andraderivatans tecken



* Konkav, konvex, inflektionspunkt

Definition: Konkav uppåt/nedåt

Funktionen f är konkav uppåt på intervallet I om f' är växande på I



Funktionen f är konkav nedåt på intervallet J om f' är avtagande på J.

Definition: Konkav, konvex

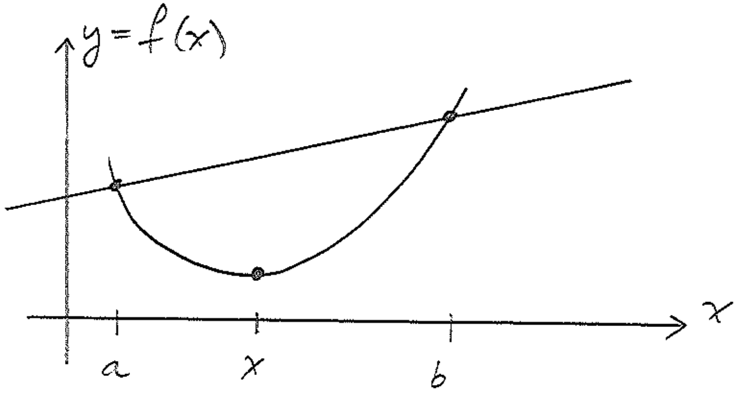
Konkav = konkav nedåt (konkav mot x-axeln)

Konvex = konkav uppåt (konvex mot x-axeln)

(konkav = bukta inåt; konvex = bukta utåt)

* Övning*: Visa att om en funktion är konvex så gäller att

$$f((1-s)a+sb) \leq (1-s)f(a) + s f(b) \;\; \forall s \in [0,1]$$



$x = (1-s)a + sb$

Ledning: 1) Tillämpa medelvärdessatsen på (a,c) och (c,a)!

2) $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$

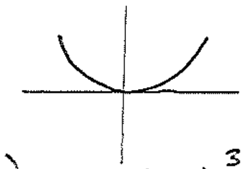
$= f(b) - \int_x^b f'(t)\,dt$

* Definition: Inflexionspunkt

Funktionen f har en inflexionspunkt i punkten $\bar{x}$ om f är deriverbar i $\bar{x}$ och f går från konkav till konvex (eller omvänt) i $\bar{x}$.

Exempel: $y = x^3$

$y' = 3x^2$



y' avtagande på $(-\infty, 0) \Rightarrow y = x^3$ konkav

y' växande på $(0, \infty) \Rightarrow y = x^3$ konvex

$x = 0$ inflexionspunkt