

\* Idag: Repetition (Obs! Ej heltäckande!)

F21


\* Gränsvärden, kontinuitet

Def.  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \epsilon$

- Givet  $\epsilon$  - bestämt  $\delta$
- $\delta = \delta(\epsilon)$
- Sats: Räkeregler (Summa, produkt, ...)
- Ensidigt gränsvärde, gränsvärde i  $\infty$

Def. Kontinuitet:  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

- Vänster/höger - kontinuitet
- Sats: Egenskaper (summa, produkt, ...)
- Kontinuerlig extension

\* Lipschitz - kontinuitet 

Def.  $f(x_1) - f(x_2) \leq L_f \cdot |x_1 - x_2|$

- Sats: Lipschitz  $\Rightarrow$  kontinuitet
- Sats: Lipschitz  $\Rightarrow$  begränsad
- Sats: Egenskaper (summa, produkt, ...)

\* Bisektionsalgoritmen 

Def. Konvergent talföljd

$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : i \geq N \Rightarrow |x_i - x| < \epsilon$

Def. Cauchy - följd

$\forall \epsilon > 0 \exists N > 0 : i, j \geq N \Rightarrow |x_i - x_j| < \epsilon$

- Reella tal " = " Cauchy-följder
- Bisektionsalgoritmen
- Sats: Konvergens  $\Leftrightarrow$  Cauchy
- Sats: Bolzanos sats
- Sats: Mellanliggande värden

\* Fixpunktsiteration

- Iteration:  $x_{n+1} = g(x_n)$

- Fixpunkt:  $x = g(x)$

- Omskrivning:  $f(x) = 0$

$$x = x + \underbrace{\alpha f(x)}_{g(x)}$$

Def. Kontraktion  $g: Lg < 1$

- Sats: Konvergerar om kontraktion  
(Banachs fixpunktsats)

-  $Lg = \max_x |g'(x)|$

- Bra val av  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{1}{f'(x)}$$

Newton's method!

\* Flyttal

- Exponentform  $x = m \cdot b^e$

- Mantissa, bas, exponent

- Talsystem ( $b=2, 10, 16$ )

- IEEE 754, "double", ~16 decimaler

-  $\epsilon_{mach} \approx 2 \cdot 10^{-16}$  Obs! Kunna omvandla från binär form  $101101_2 = 45$

\* Derivata

Def.  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

- Sats: Räkne regler (summa, produkt, ...)

- Sats: Kedjeregeln

- Derivator av trigonometriska funktioner

- Implicit derivering

- Numerisk derivata:  $h \sim \sqrt{\epsilon_{mach}}$

\* Medelvärdesatsen, linearisering

$$(1) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\bar{x}), \quad \bar{x} \in (a, b)$$

$$(2) f(b) - f(a) = f'(\bar{x}) \cdot (b - a)$$

$$(3) f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

Linearisering:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

Medelvärdesatsen

\* Newtons metod

$$\text{Lös } f(x) = 0$$

Fixpunktsiteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{g(x_{n-1})}$$

- Härledning av Newton från linearisering
- Linjär konvergens, kvadratisk konvergens

\* Inversa funktioner,  $\exp$ ,  $\ln$ , arcusfunktioner

Def. Injektiv, surjektiv, bijektiv, invers

Def.  $\ln x$ ,  $\exp x$ ,  $e$ ,  $a^x$ ,  $e^x$

- Sats: Egenskaper för  $\ln$
- Sats: Egenskaper för  $\exp$
- Arcusfunktionerna:  $\arcsin = \sin^{-1} [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$   
 $\arccos = \cos^{-1} [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$   
 $\arctan = \tan^{-1} [-\infty, \infty] \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

\* Mer om derivator

- Relaterade hastigheter
- L'Hôpital's regler
- Extremvärdesproblem  
 Extremvärde: min / max  
 Lokalt / globalt
- Kritisk punkt, singularpunkt
- Konkav uppåt / nedåt, konvex
- Inflexionspunkt

\* Taylors formel

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) (x-\bar{x})^k$$

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-\bar{x})^{n+1}$$

- Matematisk induktion

\* Talföljder, serier

- Uppåt begr., nedåt begr., positiv, växande, avtagande, monoton, alternerande, slutligt

- Serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- Delsumma, konvergens

- Absolutkonvergent, villkorligt konvergent

\* Kända serier:

Geometrisk serie  $\sum r^n$ ,  $r < 1$

p-serie  $\sum n^p$ ,  $p > 1$

\* Konvergenstester

Termtestet

Jämförelsetest I + II

Kvotestet

Absolutkonvergens

Alternerande test

\* Potensserier

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\bar{x})^n$$

- Sats: Konvergensradie, centrum

- Sats: Egenskaper (Summa, derivata)

- Taylorserie, analytiska funktioner.

