* Idag: • Tentaräkning
• Frågestund

F22-2015

* Exempeltenta (se separat dokument)

Notera: Endast svar på uppg. 1–10

1. $x^3 > 4x$

Två fall: $x < 0$, $x > 0$, $(x \neq 0)$

Fall 1: $x < 0$

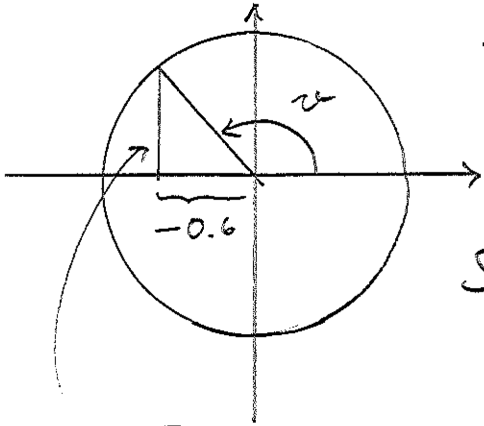
$$x^3 > 4x$$
$$x^2 < 4$$
$$|x| < 2, \text{ men } x < 0$$
$$\Rightarrow -2 < x < 0$$

Fall 2: $x > 0$

$$x^3 > 4x$$
$$x^2 > 4$$
$$|x| > 2, \text{ men } x > 0$$
$$\Rightarrow x > 2$$

$\therefore$ Svar: $-2 < x < 0 \lor x > 2$

2. $\tan(\cos^{-1}(-0.6)) = ?$



$$\tan v = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$$

Svar: $-4/3$

$$\sqrt{1-0.6^2} = \sqrt{1-0.36} = \sqrt{0.64} = 0.8$$

3. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [1,2]$

$$L_f = \max_I |f'(x)| = \max_I \frac{1/2}{\sqrt{x}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

Svar: $L_f = \frac{1}{2}$

4.
```
function y = myabs(x)
if x >= 0
  y = x;
else
  y = -x;
end
```

5. $f(x) = x^3 + x - 9$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$

$y = 1 \Leftrightarrow x^3 + x - 9 = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$

$\Rightarrow (f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{3 \cdot 2^2 + 1} = \underline{\underline{\dfrac{1}{13}}}$

Svar: $\underline{\underline{1/13}}$

6. $f(x) = 2^{(x+1)(x-1)}$

$= \exp(\ln 2 \cdot (x+1)(x-1))$

$\Rightarrow f'(x) = \exp(\ln 2 \cdot (x+1)(x-1)) \cdot \ln 2 \cdot (x - \cancel{1} + x + \cancel{1})$

$= \underline{2x \ln 2 \cdot 2^{(x+1)(x-1)}}$

(Kan förenklas ytterligare: $x \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^2}$.)

Svar: $\underline{\underline{2x \ln 2 \cdot 2^{(x+1)(x-1)}}}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \tan x} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - \cos^3 x}{\cos^2 x - 1}$

$\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos x \cdot \cancel{(-\sin x)} - 3\cos^2 x \cdot \cancel{(-\sin x)}}{2\cos x \cdot \cancel{(-\sin x)}}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos x - 3\cos^2 x}{2\cos x} = \dfrac{2-3}{2} = \underline{-\dfrac{1}{2}}$

Svar: $\underline{\underline{-1/2}}$

8. $f(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

$\Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x$

$\Rightarrow f''(x) = -4\sin 2x$

$\Rightarrow P_2(x) = \sin 2 + 2\cos 2 \cdot (x-1) - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \sin 2 \cdot (x-1)^2$

$\Rightarrow P_2(2) = \sin 2 + 2\cos 2 - 2\sin 2 = \underline{2\cos 2 - \sin 2}$

Svar: $\underline{\underline{2\cos 2 - \sin 2}}$

9. $$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{2^6 3!} + \frac{\pi^5}{2^{10} 5!} - \dots$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 - \dots$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{1/\sqrt{2}}$$

Svar: $\underline{\underline{1/\sqrt{2}}}$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n2^n}}_{=a_n} \cdot (x+2)^n$$

Kvottest för potensserier:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1/((n+1)\cdot 2^{n+1})}{1/(n\cdot 2^n)} =$$

$$= \frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = L$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \underline{2}$$

Svar: $\underline{\underline{R = 2}}$

11. Program

```
x = 1;
tol = 1e-10;
dx = 1.5;
while abs(dx) > tol
    dx = -(x^2-2)/2x; % Newton
    x = x + dx;
end
```

Bevis:

$$g(x) = x - \frac{x^2-2}{2x} = \frac{2x^2-x^2+2}{2x} = \frac{x^2+2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1 \text{ för } \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} > -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow |g'(x)| < 1 \text{ för } x > 1.$$

Tag $I = [1, 2]$. Måste visa att $g: I \to I$,

dvs $x \in I \Rightarrow g(x) \in I$.

Undersök ändpunkterna $x=1$, $x=2$ samt kritisk punkt $x=\sqrt{2}$:

$$g(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 1.5 \in I$$

$$g(2) = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1.5 \in I$$

$$g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \in I$$

$\Rightarrow$ $g : I \to I$ och $|g'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$ på I.

$\Rightarrow$ g kontraktion på I.

$\Rightarrow$ Iterationen konvergerar mot fixpunkten $x = \sqrt{2}$ enligt Banachs fixpunktssats.

12. Se föreläsning F22!

13. $f(x) = x^{\alpha}$, $x \in [\varepsilon, 1]$

$\alpha, \varepsilon \in (0,1)$

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0$$

$\alpha - 1 < 0$

$$f''(x) = \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{(\alpha-1)}_{<0} \underbrace{x^{\alpha-2}}_{>0} < 0$$

$\Rightarrow$ Maximum för $|f'(x)|$ antas i vänster ändpunkt $x = \varepsilon$.

$\Rightarrow$ $L_f = \max_{[\varepsilon,1]} |f'| = \alpha \varepsilon^{\alpha-1} < \infty$

enligt medelvärdessatsen.

$\Rightarrow$ Funktionen f är Lipschitz-kontinuerlig på $I = [\varepsilon, 1]$.

14. $f(x) = \sin(\ln(x))$

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-\sin(\ln x)\cdot \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x} - \cos(\ln x)\cdot 1}{x^2}$$

$$= -\frac{\sin(\ln x) + \cos(\ln x)}{x^2}$$

Inflexionspunkt då $f''(x) = 0$:

$$\sin(\underbrace{\ln x}_{y}) = -\cos(\underbrace{\ln x}_{y})$$

$$\sin y = -\cos y$$

$$y = \frac{3\pi}{2} + n\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\ln x = \frac{3\pi}{2} + n\cdot\pi$$

$$\underline{x = e^{\frac{3\pi}{2} + \pi\cdot n}}$$

Svar: Oändligt många inflexionspunkter i $x = e^{3\pi/2 + \pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Lösning av några utvalda ~~uppgifter~~
(efter förslag från klassen):

* Övning 5 (bevislista): Cauchy

Visa att om $\lim_{i\to\infty} x_i = \bar{x}$ så är $\{x_i\}$ en Cauchy-följd.

Betrakta $|x_i - x_j|$:

$$|x_i - x_j| = |x_i - \bar{x} + \bar{x} - x_j|$$
$$\leq |x_i - \bar{x}| + |\bar{x} - x_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

om $i, j \geq N$ och N väljs så att

$$|x_i - \bar{x}| < \varepsilon \text{ för } i \geq N,$$

vilket är möjligt, ty $\lim_{i\to\infty} x_i = \bar{x}$.

* Adams 4.10.9 (error bounds Taylor)

Beräkna feluppskattning för $P_2(9)$ för $f(x) = x^{1/3}$ och $\bar{x} = 8$.

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f(8) = 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \quad f'(8) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-2/3} = \frac{1}{12}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \quad f''(8) = -\frac{2}{9} \cdot 8^{-5/3} = -\frac{1}{144}$$
$$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3}$$

$$\Rightarrow P_2(9) = 2 + \frac{1}{12} \cdot (9-8) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{144}\right) \cdot (9-8)^2$$
$$= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = 2\frac{23}{288}$$

$$\Rightarrow 9^{1/3} = 2\frac{23}{288} + \frac{1}{6_3} \frac{\cancel{10}^{5}}{27} \xi^{-8/3} \cdot (9-8)^3$$
$$= 2\frac{23}{288} + \frac{5}{81} \xi^{-8/3}, \quad \xi \in (8, 9)$$

$$\xi^{-8/3} \in \left(9^{-8/3}, 8^{-8/3}\right) = \left(9^{-8/3}, \frac{1}{256}\right)$$

Enkel uppskattning :

$$\xi^{-8/3} \in \left(0, \frac{1}{256}\right)$$

(Notera : Den (över-)ambitiöse kan också göra en skarpare uppskattning genom att bestämma en undre begränsning för $9^{-8/3}$ baserat på uttrycket för $9^{1/3}$!)

Svar :

$$\underline{\underline{9^{1/3} \in \left(2\frac{23}{288},\ 2\frac{23}{288} + \frac{5}{81 \cdot 256}\right)}}$$

* Duggans MacLaurin-uppgift

Kan ej räkna den ifall någon vill lämna in lösning!

* Hitta bästa Lipschitz-konstant

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [1,2]$$

Exempel 1:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$$

$$= \left| \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \cdot |x_1 - x_2|$$

Måste gälla på hela intervallet!
Blir som störst (värst) då $x_1 = x_2 = 1$

$$\Rightarrow L_f = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

(Samma svar om vi deriverar och bestämmer $\max |f'|$.)

Exempel 2:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad I = [1,2]$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_2+1} \right|$$

$$= \frac{|x_2 + \cancel{1} - (x_1 + \cancel{1})|}{(x_1+1)\cdot(x_2+1)} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \cdot |x_1 - x_2| \quad (*)$$

$$\leq \frac{1}{x_1 x_2} \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{1\cdot 1} \cdot |x_1 - x_2|$$

Worst case: $x_1 = x_2 = 1$

$\Rightarrow L_f = 1$ är en Lipschitz-konstant

Men är det den bästa?

Nej! Ty om vi går tillbaka till (*) kan vi göra den skarpare uppskattningen

$$\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$\Rightarrow L_f = \frac{1}{4}$ är en bättre = mindre Lipschitz-konstant!

Samma sak med derivata:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

---

* "Något med summor" / jämförelsetest

Adams 9.3.6

$$\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\pi^n + 5}$$

$$0 \leq a_n = \frac{1}{\pi^n + 5} \leq \frac{1}{\pi^n} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^n = b_n$$

$\sum b_n$ geometrisk serie med $r = \frac{1}{\pi} < 1 \Rightarrow$ konvergerar

Jämförelsetest I $\Rightarrow \sum a_n$ konvergerar.

* <u>Kvadratisk konvergens</u>

Newton konvergerar kvadratiskt:

$$|e_n| \leq C \cdot |e_{n-1}|^2$$

för någon konstant $C > 0$

$$\begin{cases} e_n = x_n - \bar{x} \\ e_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x} \end{cases}$$

* "Derivata av komplicerad funktion som innehåller absolutbelopp"

$$f(x) = e^{|\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}|} / \tan(\ln x)$$

<u>Fall 1:</u> $\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \in [\pi/4 + 2\pi n, 3\pi/4 + 2\pi n]$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} / \tan(\ln x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{\sin x - 1/\sqrt{2}} \cdot \cos x \cdot \tan \ln x - e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\tan^2 \ln x}$$

$$= \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (x \cos^2 \ln x \cdot \cos x \cdot \tan \ln x - 1)}{\tan^2 \ln x \cdot x \cos^2 \ln x}$$

$$= \frac{e^{\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (x \cos x \cdot \sin \ln x \cdot \cos \ln x - 1)}{x \cdot \sin^2 \ln x}$$

<u>Fall 2:</u> Behandlas på motsvarande sätt

* <u>Uppgift 4b</u>, <u>övningstenta 2012-01-14</u>

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(3x)}$$

Använd Taylors formel:

$$e^{2x} - 1 = 1 + 2x + O(x^2) - 1 = 2x + O(x^2)$$

$$\sin(3x) = 3x + O(x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{2x}-1}{\sin 3x} = \frac{2x + \mathcal{O}(x^2)}{3x + \mathcal{O}(x^3)}$$

$$= \frac{2 + \mathcal{O}(x)}{3 + \mathcal{O}(x^2)} \to \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

då $x \to 0$.

---

* Övning 11 (bevislistan)

$x^4 = 16$

$x = g(x) = x + \alpha \cdot (x^4 - 16)$

Experimentera numeriskt:

$\alpha = -0.01$ fungerar bra.

Alternativ: Använd Newtons metod, ger

$$\alpha = -1/f'(x) = -\frac{1}{4x^3}.$$

Indikerar att

$\alpha = -1/32 = -0.03125$

är ett bra val.

* Övning 13:

Per definition:

$$(\underbrace{(b-1)(b-1)(b-1)\cdots(b-1)}_{n \text{ siffror}})_b = \sum_{k=0}^{n-1} (b-1) \cdot b^k$$

$$= (b-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b^k = \{\text{geometrisk summa}\}$$

$$= (b-1) \cdot \frac{1-b^n}{1-b} = b^n - 1.$$

Exempel:

$999_{10} = 1000 - 1 = 10^3 - 1$

$11111111_2 = 256 - 1 = 2^8 - 1$

* <u>Övning 15:</u>

$$f(x) = x^2$$

$$f : \underline{X} \to \underline{Y}$$

(i) $\underline{X} = \mathbb{R}$, $\underline{Y} = \mathbb{R}$

ej surjektiv, ty $-1 \in \underline{Y}$ men $-1 \notin R(f)$

ej injektiv, ty $-1, 1 \in \underline{X}$ och $f(1) = f(-1)$

(ii) $\underline{X} = \mathbb{R}$, $\underline{Y} = [0, \infty)$

surjektiv, ty $\forall y \in \underline{Y} \ \exists x \in \underline{X} : f(x) = y$ $(x = \sqrt{y})$

ej injektiv på samma sätt som i (i)

(iii) $\underline{X} = [0, \infty)$, $\underline{Y} = \mathbb{R}$

ej surjektiv på samma sätt som i (i)

injektiv, ty strängt växande på $\underline{X}$

(iv) $\underline{X} = [0, \infty)$, $\underline{Y} = [0, \infty)$

surjektiv och injektiv på samma sätt som i (ii) resp. (iii)

$\Rightarrow$ bijektiv och därmed existerar inversen $\sqrt{x}$.

* Adams/Essex 9.2.11 (9.2.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(n+2)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)/2$$

$$\Rightarrow 2S_n = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$\to 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{då } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad S_n \to 3/4$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 3/4}}$$

Lycka till på tentan!

Anders

P.S. När ni lärt er att integrera i läsperiod II, så missa inte att lära er att lösa den klassiska Chalmersintegralen!

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

(Ett mycket uppskattat partytrick! ;-)