* Idag: Frågestund

$\boxed{\text{F22-2016}}$ Tentaräkning

* Tenta 2014-01-18, uppgift 9

Maclaurin för $\sin(2x)$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1}$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}}}$$

* Lipschitz från definition, uppg. 5.3a)

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad I = [0,1]$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1^2}{x_1+1} - \frac{x_2^2}{x_2+1} \right| =$$

$$= \frac{|x_1^2 \cdot (x_2+1) - x_2^2 \cdot (x_1+1)|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}$$

$$= \frac{|x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + x_1^2 - x_2^2|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}$$

$$= \frac{|x_1 x_2 \cdot (x_1 - x_2) + (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|}$$

$$= \frac{|x_1 x_2 + x_1 + x_2|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq \frac{|x_1 x_2| + |x_1| + |x_2|}{|x_1+1| \cdot |x_2+1|} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq \frac{1 \cdot 1 + 1 + 1}{|0+1| \cdot |0+1|} \cdot |x_1 - x_2| = 3 \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\therefore \underline{\underline{L_f = 3}}$$

* Uppgift med Lipschitz och M_f, M_g

$L_f = 3,\ L_g = 5,\ I = [0,7]$

f och g skär varandra i $(1,2)$

Bestäm Lipschitz-konstant för fg.

$$L_{fg} = L_f M_g + M_f L_g$$

Notera:

$$|f(x)| = |f(x) - f(1) + f(1)|$$
$$\leq |f(x) - f(1)| + |f(1)|$$
$$\leq L_f \cdot |x-1| + 2$$
$$\leq 3 \cdot |7-1| + 2 = 20 = M_f$$

p.s.s.

$$|g(x)| \leq L_g \cdot |x-1| + 2$$
$$\leq 5 \cdot 6 + 2 = 32$$

$$\Rightarrow L_{fg} = 3 \cdot 32 + 20 \cdot 5 = \underline{\underline{196}}$$

* Tenta 2014-08-27, uppgift 9

Maclaurin för $\sin(x^2)$:

Som tidigare:

$$\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} (x^2)^{2n+1}$$
$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{4n+2}}}$$

* Tenta 2015-01-05, uppgift 7 (två frågor)

Maclaurin för $1/(1-x^{10})$

$$1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
$$1/(1-x^{10}) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{10})^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{10n}$$

* Hur man vet att en ~~talföljd~~ (sic) serie är absolutkonvergent?

Svar: Om serien med belopp är konvergent

* Exempel på konvergenstest och vilka test som är viktigast

Tips: Börja med kvottest för att undersöka absolutkonvergens

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{3n+1}{n^2+5}}_{= a_n}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3(n+1)+1}{(n+1)^2+5} \Big/ \frac{3n+1}{n^2+5}$$

$$= \frac{3(n+1)+1}{(n+1)^2+5} \cdot \frac{n^2+5}{3n+1}$$

$\longrightarrow 1 = \rho$ då $n \to \infty$

$\Rightarrow$ Antingen konvergent eller divergent

Använd jämförelsetest II med geometrisk serie: $b_n = 1/n$.

$$\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{3n+1}{n^2+5} \Big/ \frac{1}{n} = \frac{n\cdot(3n+1)}{n^2+5}$$

$\to 3 = L \in (0,\infty) \Rightarrow$ divergent ty geometrisk serie är divergent.

Men: Uppfyller de tre kraven för alternerande test $\Rightarrow$ Villkorligt konvergent

* Olikheter med absolutbelopp

$$|x + 10110_2| < |x - 1011_2|$$

$$10110_2 = 16+4+2 = 22$$

$$1011_2 = 8+2+1 = 11$$

$$|x+22| < |x-11|$$

Rita tallinje!

$-x-22 < 11-x$ $\quad$ $x+22 < 11-x$ $\quad$ $x+22 < x-11$

-22 $\quad$ 11

Fall 1: $x < -22$

$$\cancel{-x} - 22 < 11 \cancel{-x}$$

$-22 < 11$ ok!

Fall 2: $-22 \le x < 11$

$$x+22 < 11-x$$

$$2x < -11$$

$$x < -11/2 \Rightarrow -22 \le x < -11/2$$

Fall 3: $\cancel{x}+22 < \cancel{x}-11$

$22 < -11$ ↯

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{x < -11/2}}$