TENTA, 2017-08-23

$\boxed{\text{F22 - 2017}}$ Idag: - Frågestund
- Tentaräkning

1. Lös olikheten $x^3 > 4x$.

Tre fall:

i) $x = 0 \Rightarrow 0 > 0$ ↯

ii) $x > 0 \Rightarrow \frac{x^3}{x} > \frac{4x}{x} \Leftrightarrow x^2 > 4$

$\therefore \; x > 2$

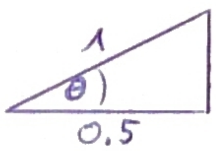
iii) $x < 0 \Rightarrow \frac{x^3}{x} < \frac{4x}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4$

$\therefore \; x \in (-2, 0)$

Svar: $x \in (-2,0) \cup (2, +\infty)$

2. Bestäm värdet av $\tan(\text{acos}(0.5))$.

Låt $\theta = \text{acos}(0.5) \Rightarrow \cos(\theta) = 0,5$



$\sqrt{1 - 0.5^2} = \sqrt{0.75} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$.

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \ln(1/x)$ på intervallet $[\varepsilon, 1]$ för $0 < \varepsilon < 1$.

$\boxed{\text{bästa} \triangleq \text{minsta}}$ Använd sats 4.8

$f(x) = \ln(1/x) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow L_f = \max_{x \in [\varepsilon, 1]} |f'(x)| = \frac{1}{\varepsilon}$

4. Skriv en MATLAB funktion som implementerar tredje ordningens Maclaurin-polynom för funktionen $\sin(x)$.

$Q_3[\sin](x) = x - \frac{1}{6}x^3$

```
function y = maclaurin(x)
    y = x - x.^3 /6;        ← vektoriserad
end
```

$\boxed{\text{F.22.1}}$

5. Bestäm minsta värdet för funktionen $f(x) = \dfrac{1+2x}{1-2x}$ på intervallet $[1, +\infty]$

f har en singulärpunkt i $x = \frac{1}{2} \notin [1, +\infty]$

$$f'(x) \overset{\text{kvot-regel}}{=} \frac{(1-2x)\cdot 2 - (1+2x)\cdot(-2)}{(1-2x)^2} =$$

$$= \frac{2-4x+2+4x}{(1-2x)^2} = \frac{4}{(1-2x)^2}$$

$\Rightarrow f'(x) \neq 0$ för $x \in [1, +\infty]$, inga extrempunkter.

Undersök ~~extr~~ änd-punkter:

$$f(1) = \frac{3}{-1} = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"}\frac{\infty}{-\infty}\text{"} \to \text{l'Hôpital}}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{-2} = -1$$

Svar: -3

6. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $h = 5f + 10g$ om $L_f = 2$ och $L_g = 3$.

Använd sats 3.6 i) $L_{f+g} = L_f + L_g$ och

iii) $L_{\alpha f} = |\alpha| L_f$

$$L_h = |5| L_f + |10| L_g = 40$$

7. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = \dfrac{1}{1-x^{10}}$

på intervallet $(-1, 1)$.

Geometrisk serie: För $r \in (-1, 1)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

Här: $x \in (-1, 1) \Rightarrow x^{10} \in [0, 1) \subset (-1, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^{10}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (x^{10})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{10k}$$

8. Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x\tan(x)$ runt $\bar{x} = \pi$.

Def. 4.4: $L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$

Nu förtiden även: Första ordningens Taylorpolynom av f runt $\bar{x} = \pi$.

$$f(\pi) = \pi \tan(\pi) = 0$$

$$f'(x) = \tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}$$

$$f'(\pi) = \tan(\pi) + \frac{\pi}{\cos^2(\pi)} = \pi$$

$$\Rightarrow L_\pi[f](x) = 0 + \pi(x - \pi) = \pi x - \pi^2$$

$\boxed{\text{F.22.2}}$

9. Bestäm $P_4(2\pi + 0.1)$ då P_4 är 4:e-ordningens Taylorutveckling av $\cos(2x)$ runt $\bar{x} = 2\pi$.

$f(x) = \cos(2x)$ $\quad f(2\pi) = 1$ $\quad \bar{x} = 2\pi \Rightarrow 2\bar{x} = 4\pi$

$f'(x) = -2\sin(2x)$ $\quad f'(2\pi) = 0$

$f''(x) = -4\cos(2x)$ $\quad f''(2\pi) = -4$

$f^{(3)}(x) = 8\sin(2x)$ $\quad f^{(3)}(2\pi) = 0$

$f^{(4)}(x) = 16\cos(2x)$ $\quad f^{(4)}(2\pi) = 16$

$$\Rightarrow P_4(x) = 1 - 4/2! \cdot (x-2\pi)^2 + 16/4!\,(x-2\pi)^4 =$$
$$= 1 - 2\cdot(x-2\pi)^2 + 2/3\,(x-2\pi)^4$$

Svar: $P_4(2\pi + 0.1) = 1 - 2\cdot 0.1^2 + 2/3 \cdot 0.1^4 =$
$= 0.98 + 2/3 \cdot 10^{-4}$

---

10. Bestäm en approximation av $\sqrt{3}$ genom att utföra två iterationer med Newtons metod för ekvationen $x^2 = 3$ och $x_0 = 1$.

Låt $f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2\cdot x_0} = 1 - \frac{-2}{2} = 2$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 3}{2\cdot x_1} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Svar: $\sqrt{3} \approx 7/4$

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^2 = 2$ med Newtons metod med ca. 10 decimalers noggrannhet.

Förberedelse: $f(x) = x^2 - 2$
$f'(x) = 2x$

<u>Alternativ 1:</u> Låt $I = [1,2]$. f är kont. deriverbar på I och $\bar{x} = \sqrt{2} \in I$.

Bestäm $M = \max_{x\in I} \left|\frac{1}{f'(x)}\right| = 1/2$.

Sats 6.6: $|\bar{x} - x_n| \leq M\,|f(x_n)| = \frac{1}{2}|x_n^2 - 2|$

för $n = 0,1,2,3,\ldots$, dvs om $|x_n^2 - 2| < 10^{-10}$

$\Rightarrow |\bar{x} - x_n| \leq |x_n^2 - 2| < 10^{-10}$.

```
x = 1;
tol = 1e-10;
while 0,5*abs(x^2-2) > tol
x=x-(x^2-2)/(2*x);
end
```

$\boxed{\text{F.22. 3}}$

Alternativ 2: Med $f''(x) = 2$ bestäm

även $k = \max_{x \in I} |f''(x)| = 2$.

Sats 6.6:

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \le \frac{1}{2} \cdot k \cdot M \cdot |\bar{x} - x_n|^2 =$$
$$= \frac{1}{2} |\bar{x} - x_n|^2$$

$\Rightarrow$ Om $|\bar{x} - x_n| < 1 \Rightarrow |\bar{x} - x_{n+1}| \le \frac{1}{2}|\bar{x} - x_n|^2 \le |\bar{x} - x_n|$

Avståndet minskar i varje steg: $\Delta x = x_{n+1} - x_n$

```
x = 1;
tol = 1e-10;
dx = 2 * tol;
while abs(dx) > tol
    dx = -(x^2 -2)/(2*x);
    x = x + dx;
end
```

$\boxed{\text{Alternativt kan argumenteras att } (x_n)_n \text{ är en Cauchy följd, då } (x_n)_n \text{ konvergerar } \Rightarrow |x_{n+1} - x_n| \to 0 \text{ för } n \to +\infty}$

$\leftarrow$ behövs så att villkoret i 'while' är sant i första iterationen

12. Formulera satsen om Lipschitz-kontinuitet för en produkt och genomför beviset.

Se föreläsningsanteckningar.

11. Bestäm alla fixpunkter till

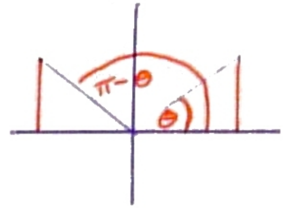
$$g(x) = 5(\sin(2x) - \cos(3x)) + x.$$

Lös $x = g(x)$

$\Leftrightarrow \quad 5 \cdot (\sin(2x) - \cos(3x)) = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \cos(3x)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(2x) = \sin(\pi/2 - 3x)$



$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = (\frac{\pi}{2} - 3x)(+2\pi n) \\ 2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 3x)(+2\pi n) \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = \pi/2 \ (+2\pi n) \\ -x = \frac{\pi}{2} \ (+2\pi n) \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pi/10 \ (+2\pi n) \\ x = -\frac{\pi}{2} \ (+2\pi n) \end{cases}, \ n \in \mathbb{Z}$

Egentligen räknar man "modulo 2π" dvs delar man VL och HL genom 2π så att

$VL = 2\pi \cdot k + r_1$, $HL = 2\pi \cdot m + r_2$

där $k, m \in \mathbb{Z}$, så jämför vi resterna r_1, r_2:

$VL = HL$ modulo 2π

$\Leftrightarrow r_1 = r_2$ modulo 2π

14. Låt f och g vara Lipschitz-kontinuerliga funktioner på intervallet $[a,b]$ med Lipschitz-konstanter L_f, L_g och begränsade av M_f, M_g. Bestäm en Lipschitzkonstant för funktionen $h = f^2 g + f g^2$.

Använd sats 1.6:

$$L(f^2) = M_f L_f + L_f M_f = 2 M_f L_f$$
$$L(g^2) = 2 M_g L_g$$
$$M(f^2) = M_f^2$$
$$M(g^2) = M_g^2$$

$$L_h = L(f^2 g) + L(f g^2) =$$
$$= M(f^2) L_g + L(f^2) M_g + M_f L(g^2) + L_f M(g^2) =$$
$$= M_f^2 L_g + 2 M_f M_g L_f + 2 M_f M_g L_g +$$
$$+ M_g^2 L_f =$$
$$- L_f M_g (2 M_f + M_g) +$$
$$+ L_g M_f (2 M_g + M_f)$$

Lycka till på tentan och i framtiden!

F.22. 5