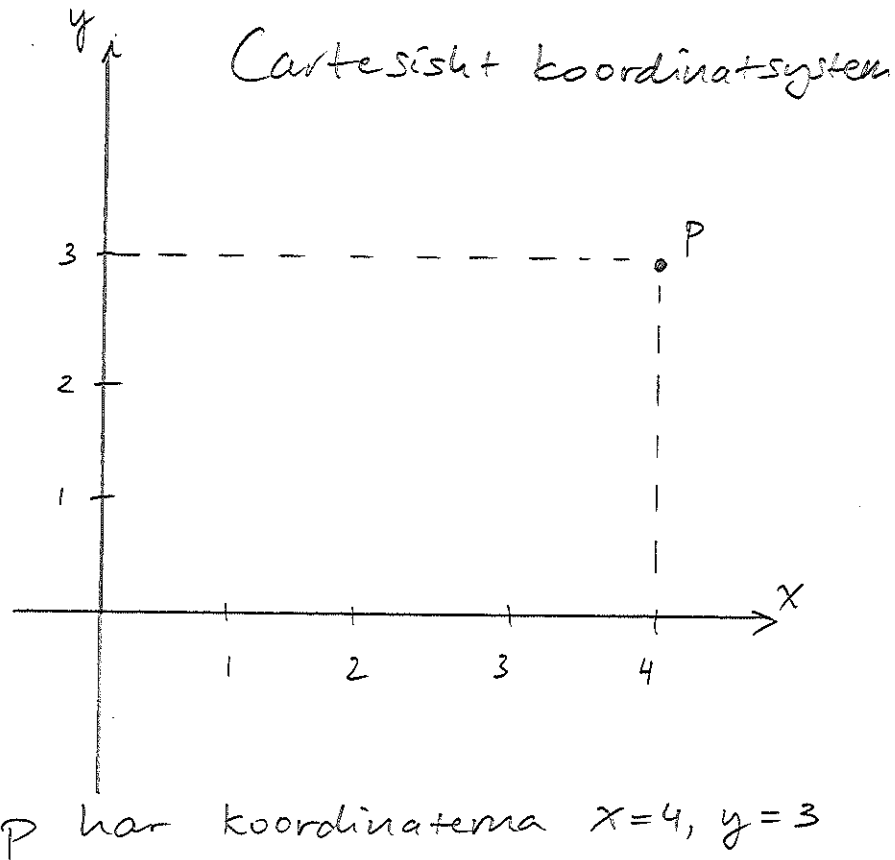


* Idag: Analytisk geometri

F3 (RP kap 3)

* Koordinater



x och y är koordinater (koordinatfunktioner) för punkten p :

$$\begin{cases} x(p) = 4 \\ y(p) = 3 \end{cases}$$

reella talen

$$\begin{cases} x : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ y : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

euklidiska planet

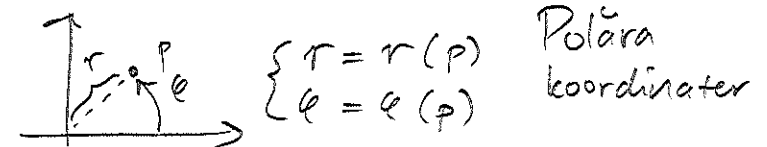
par av reella tal

$$(x, y) : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Normalt tänker vi $\mathbb{E}^2 = \mathbb{R}^2$ och skriver

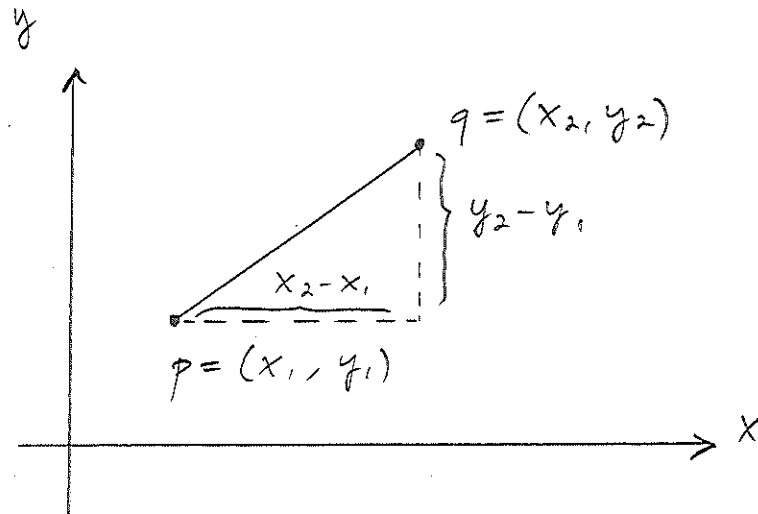
$$p = (x, y)$$

Notera: Koordinater behöver ej vara Cartesiska



* Definition: Avstånd

$d(p, q)$ = avstånd mellan punkterna p och q



Pythagoras sats ger:

$$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Viktigt specialfall: $q = (0, 0)$ (origo)

$$|p| = d(p, (0, 0)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

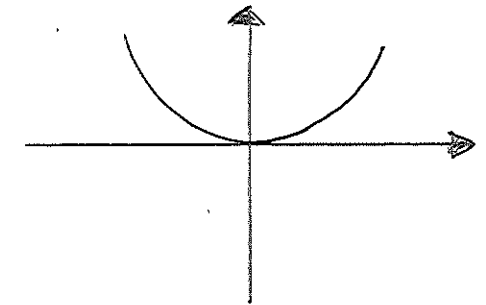
* Definition: Graf

Givet en ekvation i x och y är grafen till ekvationen mängden av de punkter (x, y) som uppfyller ekvationen.

Exempel:

$$(i) \quad y - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^2$$



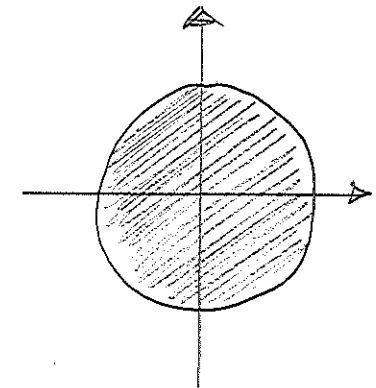
$$(ii) \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{sluten})$$

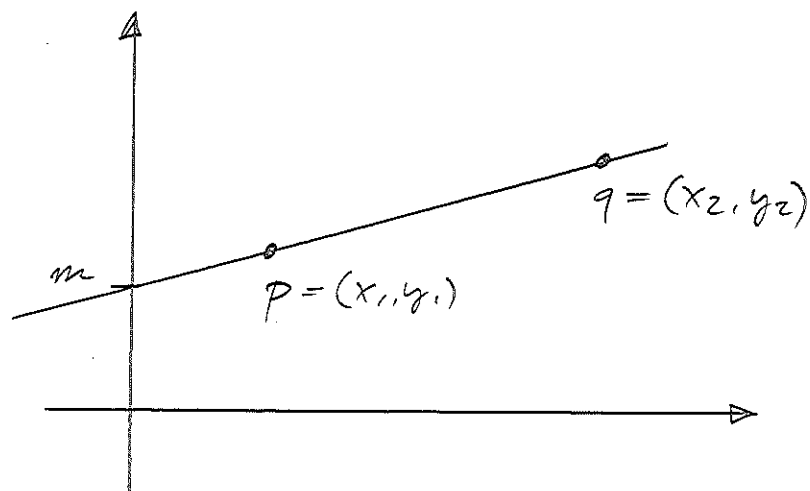
$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (\text{sluten})$$

$$x^2 + y^2 < 1 \quad (\text{öppen})$$

$$x^2 + y^2 \geq 1 \quad (\text{sluten})$$

$$x^2 + y^2 > 1 \quad (\text{öppen})$$



* Räta linjen

Standardform: $y = kx + m$

k = riktningskoefficient

(Notera: Adams/Essex använder m !)

Bestäm k och m från p och q .

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + m \\ y_2 = kx_2 + m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 - y_2 &= kx_1 + m - (kx_2 + m) \\ &= k(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow m = y_1 - kx_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\therefore y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_k \cdot x + \underbrace{y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1}_m$$

Behöver ej memoreras!
(Kan härledas vid behov)

Övning: Visa att linjen mellan punkterna $p = (x_1, y_1)$ och $q = (x_2, y_2)$ kan skrivas

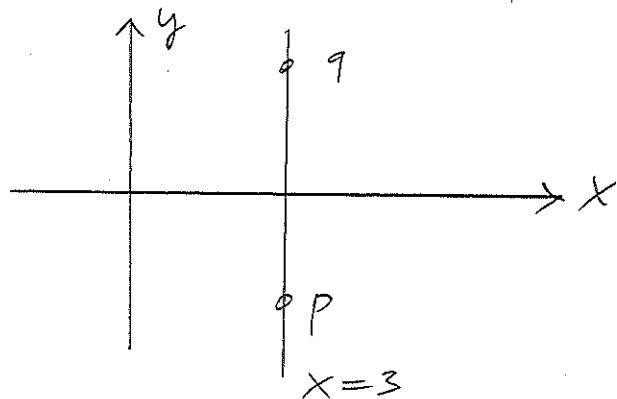
$$y = y_1 \lambda_1(x) + y_2 \lambda_2(x)$$

där $\lambda_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $\lambda_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Tolka formeln!

Notera: Standardformen bryter ihop
då $x_1 = x_2$

\therefore Kan ej beskriva linjen $x = \text{konstant}$



Allmän form:

$$ax + by = c$$

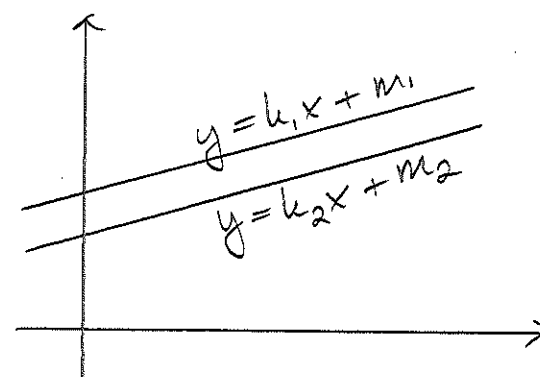
(alt. $ax + by + c = 0$)

Exempel:

$$x - 3 = 0$$

$$3x - y = 1 \iff y = 3x - 1$$

* Parallella linjer



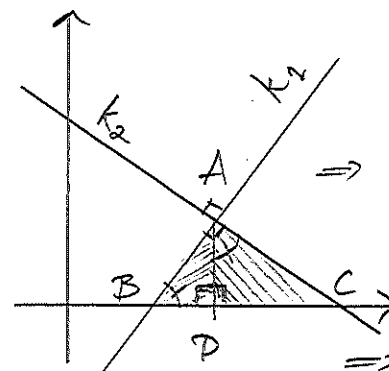
$$k_1 = k_2$$

Öving: Visa detta!

Ledning: Parallella linjer

Linjerna skär aldrig

* Viinkelräta linjer



$\triangle ABD \sim \triangle CAD$
är likformig med

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD} = k_1 \cdot -1/k_2$$

$$\Rightarrow k_1 k_2 = -1$$

* Andragradskurvor

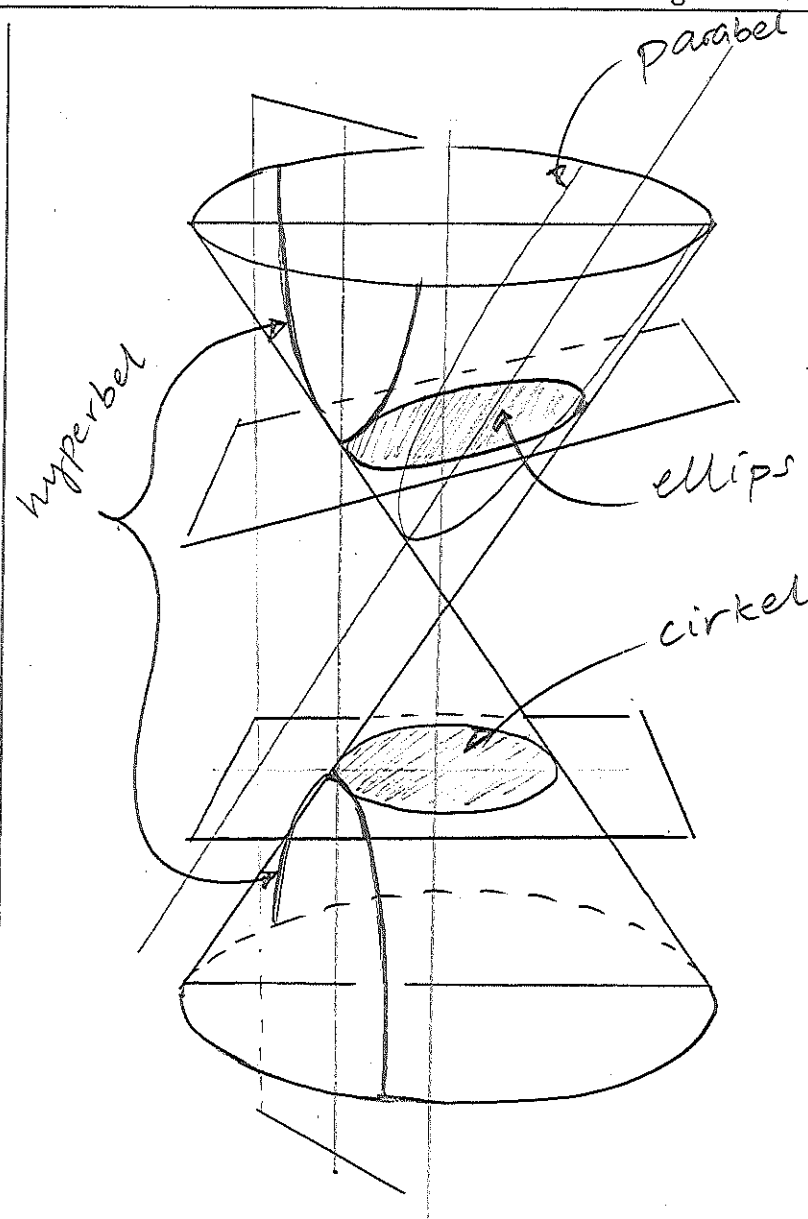
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

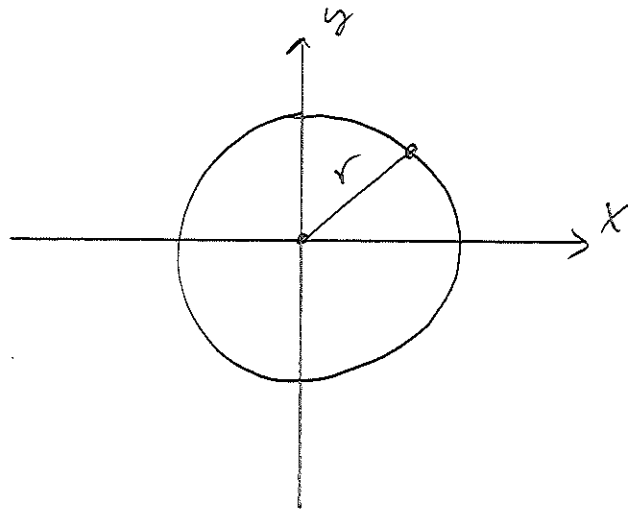
(allmän form)

De olika specialfallen av andragradskurvor kallas "kägelsnitt" eller "koniska sektioner"

Fås som skärning mellan en dubbelkon och ett plan:

- parabel
- cirkel
- ellips
- hyperbel



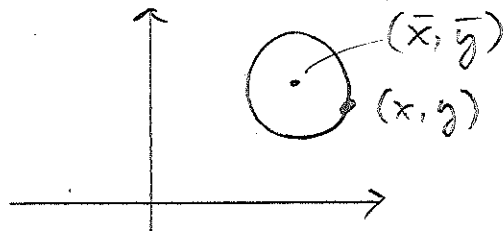
* Cirkel

$$d(p, (0,0)) = r$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Translatera till punkten (\bar{x}, \bar{y})



Avståndsformeln ger:

$$d((x,y), (\bar{x}, \bar{y})) = r$$

$$\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2} = r$$

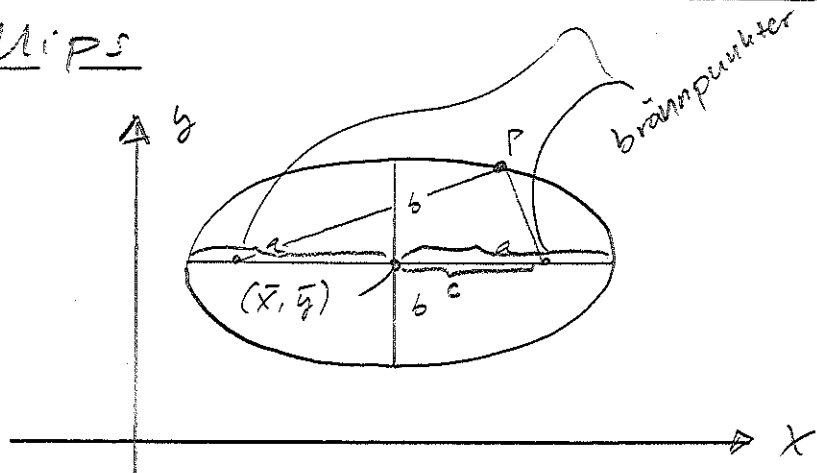
$$(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 = r^2$$

$$\left(\frac{x-\bar{x}}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{r}\right)^2 = 1$$

Övning: Skriv på allmän form!
(Bestäm A, B, C, D, E)

Notera: (\bar{x}, \bar{y}) anger translation
och r anger skalning

* ELLIPS



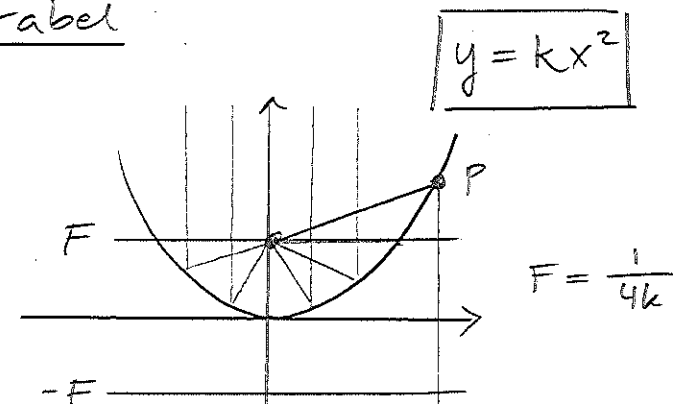
$$\left(\frac{x - \bar{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - \bar{y}}{b}\right)^2 = 1$$

a och b kallas ellipsens halvaxlar

Notera: Summan av avståndet till brännpunkterna är konstant.

Övning: Visa att att detta avstånd ges av $k=2a$ och att $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

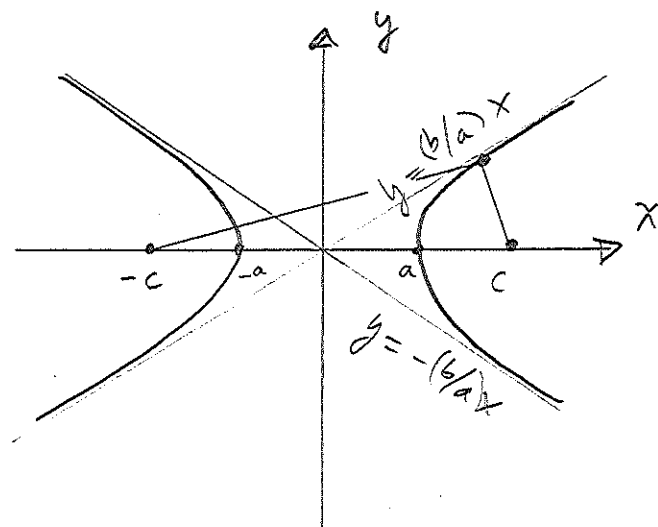
* Parabel



Notera:

- (i) Samma avstånd till punkten $(0, F)$ som till planet $y = -F$.
- (ii) Parallella strålar fokuseras i punkten $(0, F)$

Övning: Visa (i) + (ii)!

* Hyperbel

$$\left(\frac{x-\bar{x}}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-\bar{y}}{b}\right)^2 = \pm 1$$

Tag $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \pm 1$$

För stora x, y får vi

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \approx \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

$$\Rightarrow y \approx \pm \frac{b}{a} x$$

Dessa linjer kallas hyperbelens asymptoter.

Övning: Visa att $xy=1$ också definierar en hyperbel (i ett koordinatsystem roterat 45°).

Notera: Skillnaden i avstånd till brännpunkterna $c, -c$ är konstant ($=2a$)