

* Idag: Funktionslära

F4 (RP Kap 4)

↖ ej avsnitt 4.8 om gränsvärden

* Definition: Funktion

{ En funktion är en regel som för varje punkt x i en mängd X ger ett entydigt bestämt y i en mängd Y .

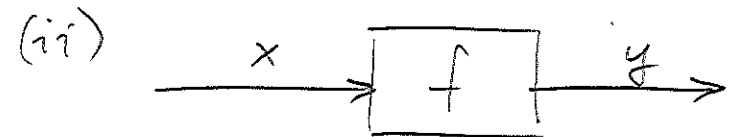
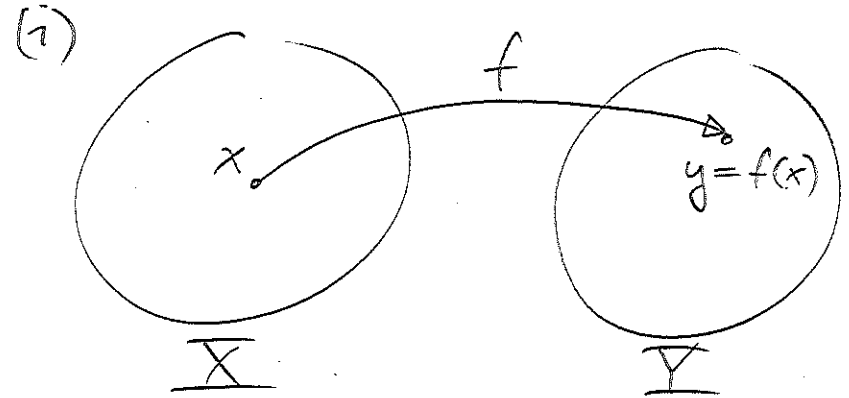
Skrivsätt:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$f: \begin{pmatrix} X \\ \cup \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Y \\ \cup \end{pmatrix}$$

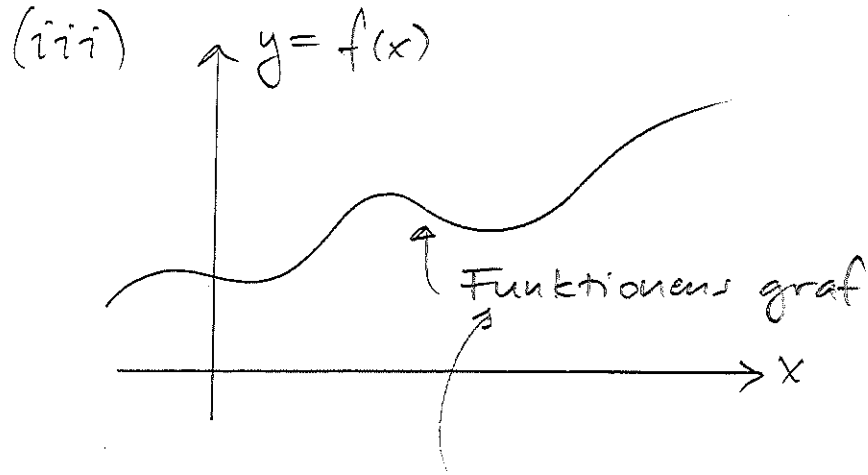
$$f: x \mapsto f(x)$$

Illustration:



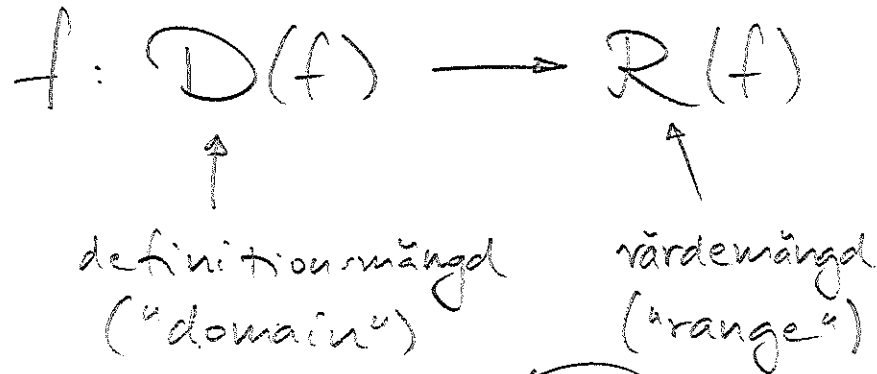
f är en maskin som för varje x producerar ett y

Notera: X kan vara samma som Y

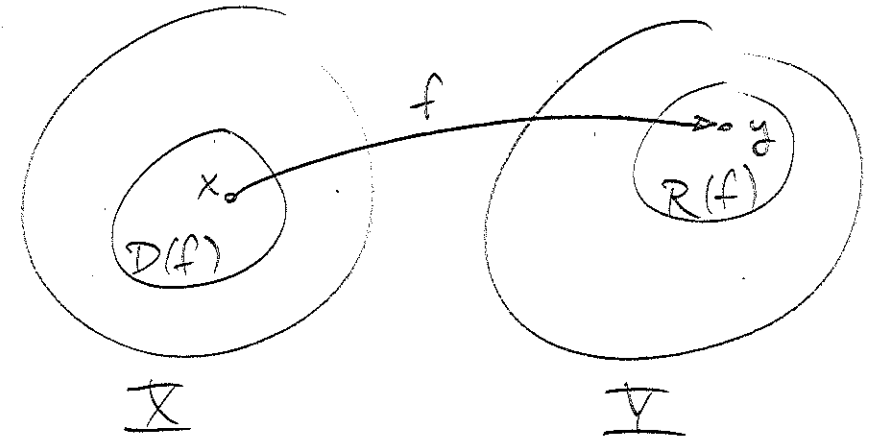


Alla punkter (x, y) som uppfyller $y = f(x)$.

* Definitionsmängd och värdemängd



Notera: $\left\{ \begin{array}{l} D(f) \subseteq X \\ R(f) \subseteq Y \end{array} \right.$ "delmängd av"



Exempel:

$$f(x) = x^2$$

$$D(f) = (-\infty, \infty)$$

$$R(f) = [0, \infty)$$

Exempel:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$D(f) = [0, \infty)$$

$$R(f) = [0, \infty)$$

* Derivata

Derivatans av en funktion f i punkten x ges av

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

(om detta gränsvärde existerar).

Vi skall studera gränsvärden och derivator i detalj i läsperiod I.

Idag fokuserar vi istället på räkneregler för derivator. Vi

kommer i läsperiod I att bevvisa samtliga dessa räkneregler.

* Deriveringsregler(i) Räkneregler

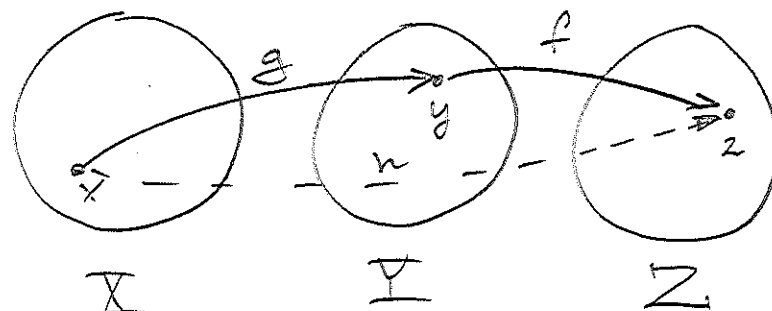
$$\left. \begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (f-g)' &= f' - g' \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \end{aligned} \right\} \text{Derivatans} \\ \text{är } \underline{\text{linjär}}$$

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg' \\ (f/g)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

(ii) Derivata av elementära funktioner

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^a	$a x^{a-1}$
b^x	$b^x \cdot \ln b$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x$

(iii) Kedjeregeln



$$f : Y \rightarrow Z$$

$$g : X \rightarrow Y$$

$$h : X \rightarrow Z$$

$$\begin{cases} h = f \circ g & (\text{komposition}) \\ h(x) = f(g(x)) \end{cases}$$

Kedjeregeln

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

linje derivatan

Exempel:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 8}$$

$$= (x^2 + x - 8)^{1/2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + x - 8)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (2x + 1)$$

$$= \frac{2x + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x - 8}}$$

Exempel:

$$f(x) = \sin(\cos(e^{1/\sin(x)}))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(\cos(e^{1/\sin(x)})) \times$$

$$\times (-\sin(e^{1/\sin(x)})) \times$$

$$\times e^{1/\sin(x)}$$

$$\times \left(-\frac{1}{\sin^2(x)}\right) \times \cos x$$

(iv) Implicit derivering

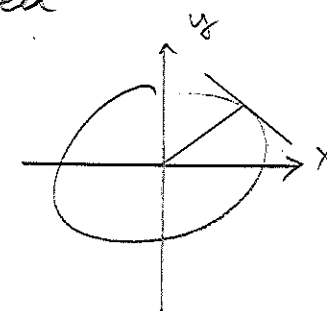
Bestäm derivatan $\frac{dy}{dx}$ ur ekvationen $F(x, y) = 0$ genom att derivera F m.a.p. x .

Exempel: Bestäm derivatan (lutningen) dy/dx på cirkeln

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{i punkten}$$

$$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



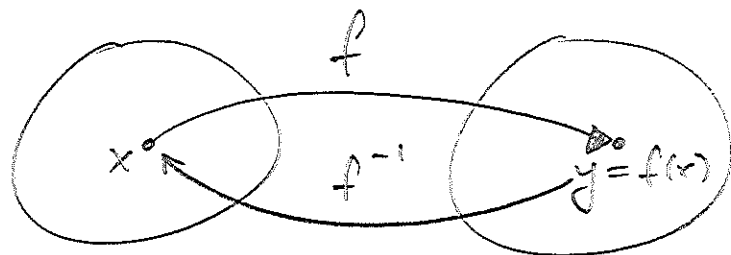
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -x/y$$

$$= -\frac{(1/\sqrt{2})}{(1/\sqrt{2})} = -1$$

(v) Derivata av invers



$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

$= y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Exempel: Bestäm derivatan av

$$\arcsin = \sin^{-1}$$

$$\frac{d}{dx} (\arcsin x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} (\sin(y))}$$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$x \in [-1, 1]$ $\sin y = x$
 $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Maximi- och minimiproblem

Lokalt extremvärde:

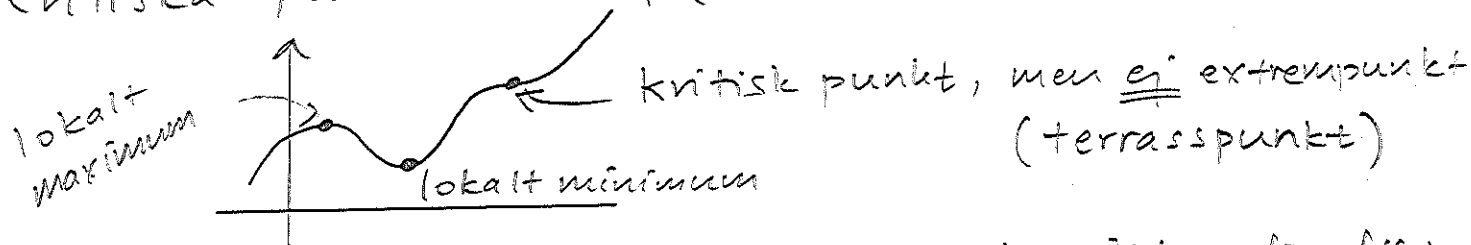
Punkt \bar{x} sådan att

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \text{ för alla } x \text{ "i närheten av" } \bar{x} \quad (\text{lokalt maximum})$$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \text{ för alla } x \text{ "i närheten av" } \bar{x} \quad (\text{lokalt minimum})$$

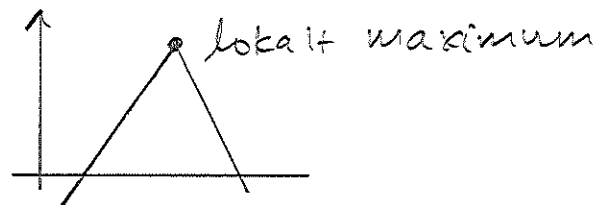
Tre typer av lokala extrempunkter:

(i) Kritiska punkter : $f'(x) = 0$

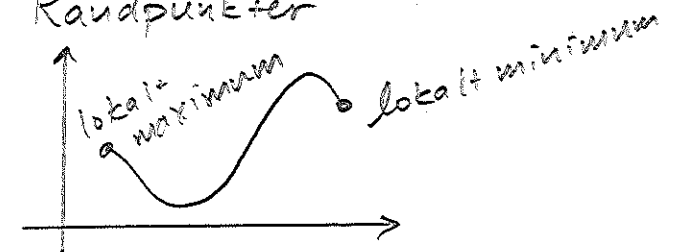


Tecken på $f''(x)$, eller mer allmänt teckenväxling för $f'(x)$, avgör min eller max

(ii) Punkter där $f'(x)$ ej existerar



(ii) Randpunkter



Globala extremvärden hittas genom att
undersöka alla lokala extremvärden.

Exempel:

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x \cdot (x^2 - 4) = 4x \cdot (x+2)(x-2)$$

(i) Undersök kritiska punkter ($f'(x) = 0$)

$$f'(x) = 0 \text{ då } x = 0, x = -2, x = 2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$x = -2$	$f(x) = -16$	$f'(x) = 0$	$f''(x) = 32 > 0 \Rightarrow$	lokalt minimum	∪
$x = 0$	$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$	$f''(x) = -16 < 0 \Rightarrow$	lokalt maximum	∩
$x = 2$	$f(x) = -16$	$f'(x) = 0$	$f''(x) = 32 > 0 \Rightarrow$	lokalt minimum	∪

(ii) Undersök punkter där $f'(x)$ ej är definierad: saknas

(iii) Undersök randpunkter

$$f(+\infty) = +\infty$$

$$f(-\infty) = +\infty$$

\Rightarrow

Lokalt min: $x = \pm 2$

Lokalt max: $x = 0$

Globalt min: $x = 0$

Globalt max: saknas

* Kurvritning, grafer

Självstudium!