* Idag: Komplexa tal

$\boxed{F5}$ Adams/Essex A.I

* Lösning av ekvationer

- I begynnelsen fanns $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Lös

$$x + 3 = 1$$

$x \notin \mathbb{N}$!

- Inför $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$, lösning $x = -2$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Lös

$$5x - 3 = 0$$

$x \notin \mathbb{Z}$!

- Inför $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$, lösning $x = 3/5$

Lös $x^2 = 2$

$x \notin \mathbb{Q}$!

(Antag: $\sqrt{2} = p/q$ utan gemensamma faktorer
$\Rightarrow 2 = p^2/q^2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$
$\Rightarrow p^2$ jämnt $\Rightarrow p$ jämnt
$\Rightarrow p = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2$
$\Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$
$\Rightarrow q$ jämnt $\lightning$ ty gemensam faktor)

- Inför $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, lösning $x = \pm\sqrt{2}$

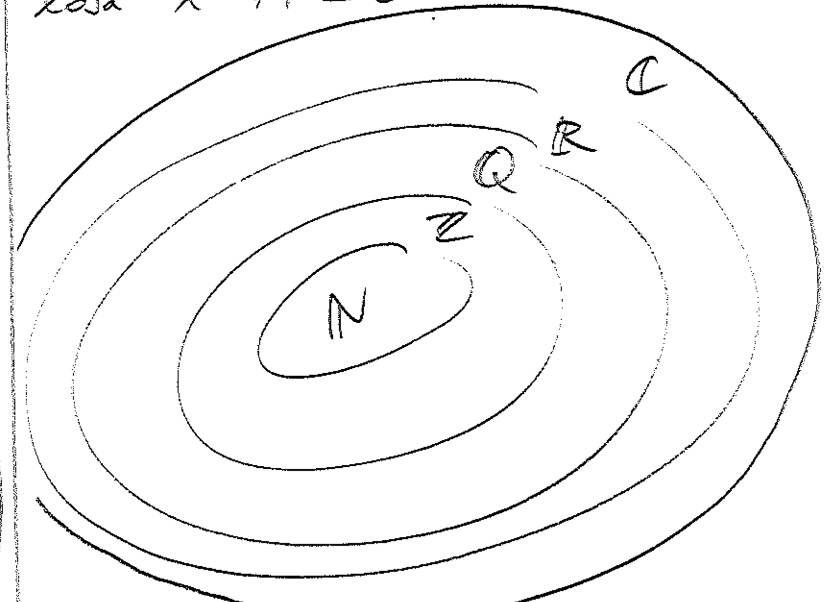
(Drumroll ...)

Lös

$$x^2 + 1 = 0$$

$x \notin \mathbb{R}$!!!

Hur utvidgar vi $\mathbb{R}$ för att kunna lösa $x^2 + 1 = 0$?



* Lösning: inför den "imaginära enheten" $i \in \mathbb{C}$ som uppfyller

$$i^2 = -1$$

$\Rightarrow x = \pm i$ löser $x^2 + 1 = 0$

I allmänhet ges ett komplext tal som

$$z = a + bi$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ och i är den imaginära enheten.

Denna (något otillfredsställande) definition av $\mathbb{C}$ ges i boken (Adams).

Vad är i???

* Definition: $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

med operationerna

$+ : \quad (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

$\cdot : \quad (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad)$

Man kan visa att $\mathbb{C}$ med dessa operationer är en fullständig "kropp" (eng. field).

Första elementet kallas realdel:

$$\operatorname{Re}(a,b) = a$$

Andra elementet kallas imaginärdel:

$$\operatorname{Im}(a,b) = b$$

Vi identifierar $\mathbb{R}$ med $\operatorname{Im} = 0$:

$$\mathbb{R} \text{ "=" } \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow z = (x, 0) \in \mathbb{C}$$

Notation:

$$(1,0) = 1$$
$$(0,1) = i$$

$$\Rightarrow (a,b) = (a,0) + (0,b)$$
$$= a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1)$$
$$= a\cdot 1 + b\cdot i$$

$$\therefore (a,b) = a + bi$$

Kontroll 1:

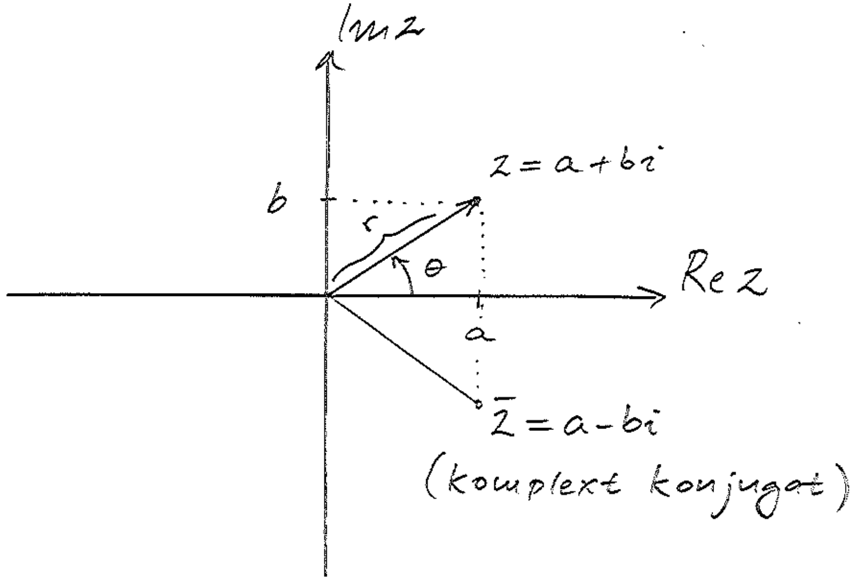
$$z = i = (0,1)$$
$$\Rightarrow z^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 0\cdot 1)$$
$$= (-1,0) = -1 \quad \underline{\underline{\text{ok!}}}$$

Kontroll 2:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a+bi)(c+di)$$
$$= ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac - bd + (ad+bc)i = (ac-bd, bc+ad) \quad \underline{\text{ok!}}$$

Slutsats: Räkna som vanligt med tillägget att $i^2 = -1$.

* Grafisk representation



* Absolutbelopp och argument

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\arg z = \theta$$

Notera: arg z är ej unikt bestämd!

$$\arg z = \theta + 2\pi n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ger alla samma komplexa tal.

* Polär notation

Från figuren följer:

$$a = r \cdot \cos\theta$$
$$b = r \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow a + bi = r\cos\theta + r\sin\theta \cdot i$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Definiera nu:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Vi kan då skriva

$$z = a + bi = re^{i\theta}.$$

* Sats: $e^{iu} \cdot e^{iv} = e^{iu+iv} = e^{i(u+v)}$

Bevis:

$$e^{iu} = \cos u + i\sin u$$
$$e^{iv} = \cos v + i\sin v$$

$$\Rightarrow e^{iu} \cdot e^{iv} = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v)$$
$$= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$
$$+ i \cdot (\sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u)$$
$$= \cos(u+v) + i\sin(u+v)$$
$$= e^{i(u+v)}.$$

∎

* Sats: de Moivres formel

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Bevis:

$$e^{(i\theta)n} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta} \cdots e^{i\theta} = e^{2i\theta} \cdots e^{i\theta} = \ldots = e^{in\theta}.$$

∎

* Några räkneregler
(följer enkelt ur definitionen)

$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}\, z$$

$$\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}\, z$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\bar{z} \cdot z = |z|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$$

$$\arg(z_1 / z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$$

* Ekvationslösning (exempel)

Lös $z^{10} + 2z^5 = -1$

Låt $w = z^5$

$$w^2 + 2w + 1 = 0$$

$$(w+1)^2 = 0$$

Två dubbelrötter : $w = -1$

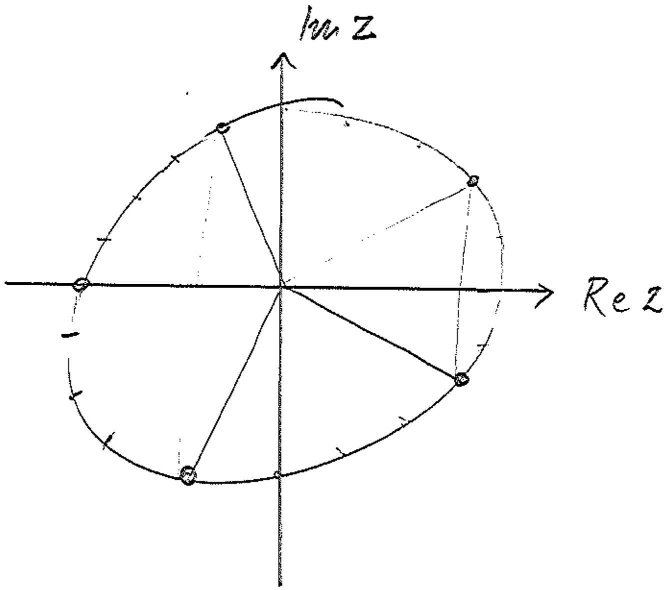
$$\therefore \; z^5 = -1$$

$$(re^{i\theta})^5 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$r^5 e^{i5\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$$

$$\begin{cases} r^5 = 1 \\ 5\theta = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi/5 + \frac{2\pi n}{5}, \quad n = 0,1,2,3,4 \end{cases}$$



- En reell dubbelrot
- 4 parvis komplexkonjugerade dubbelrötter

* Förlängning med komplexkonjugatet

Exempel: Beräkna $\left|\frac{1+2i}{3+2i}\right|$

$$\left|\frac{1+2i}{3+2i}\right| = \left|\frac{(1+2i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}\right|$$

$$= \left|\frac{3-2i+6i+4}{9+4}\right| = \frac{|7+4i|}{13}$$

$$= \left|\frac{7}{13}+\frac{4}{13}i\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2+\left(\frac{4}{13}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{49+16}{169}} = \frac{\sqrt{65}}{13}$$

Alternativ lösning:

$$\left|\frac{1+2i}{3+2i}\right| = |1+2i| / |3+2i|$$

$$= \sqrt{5} / \sqrt{13}$$

$$= \frac{\sqrt{5\cdot 13}}{13} = \frac{\sqrt{85}}{13}$$