Komplexa tal

Vi inleder med att repetera hur man räknar med komplexa tal, till att börja med utan att bekymra oss om frågor som vad ett komplext tal är och hur vi kan veta att komplexa tal finns. Dessa och andra liknande frågor kommer vi att kommentera helt kort i slutet av texten.

Låt oss börja (som de flesta läroböcker gör) med att införa beteckningen i för den imaginära enheten, som är ett tal vars kvadrat är -1. Talet i uppfyller alltså $i^2 = -1$. Komplexa tal kallar vi alla tal som har formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Talet $a + bi$ har realdel a och imaginärdel b, som betecknas $a = \mathrm{Re}\,(a + bi), b = \mathrm{Im}\,(a + bi)$. Notera att imaginärdelen endast omfattar koefficienten framför i och är således, namnet till trots, ett reellt tal. Tal med imaginärdel 0 är reella, och tal med realdel 0 kallas rent imaginära. Komplexa tal adderas och multipliceras som polynom av i med reella koefficienter, och man förenklar resultaten genom att använda likheterna

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = -i^2 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

Exempel 1. $(3 + i) - (2 - 3i) = 3 + i - 2 + 3i = 1 + 4i$.
Exempel 2. $(3 + i) \cdot (2 - 3i) = 6 - 9i + 2i - 3i^2 = 6 - 7i - 3 \cdot (-1) = 9 - 7i$.

Det är dock inte så lätt att tillämpa samma princip vid division; givet talet 1 är det svårt att se om man ska tolka det som en reell etta, eller som i^4, eller som $-i^2$, eller som en tredjedel av varje. Vid division eftersträvar man att skriva om den givna kvoten med en nämnare som är reell. Det gör man genom att använda nämnarens så kallade komplexkonjugat. Varje komplext tal $z = a + bi$ har ett komplexkonjugat $\bar{z} = a - bi$, som alltså är ett tal med samma realdel som z, men med motsatt imaginärdel. Det är uppenbart att talet z är reellt exakt när $z = \bar{z}$.

Exempel 3. $\overline{3 + i} = 3 - i, \quad \overline{2 - 3i} = 2 + 3i, \quad \bar{4} = 4$.

En enkel kalkyl visar följande likheter ($z = a + bi$)

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}\,z, \qquad z - \bar{z} = 2bi = 2i\mathrm{Im}\,z, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2,$$
$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Likheten $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ger oss möjligheten att, genom att förlänga med nämnarens konjugat, skriva om varje kvot som en kvot med reell nämnare, för att sedan enkelt utföra divisionen. Observera att division med 0 fortfarande är otillåten.

Exempel 4. $\dfrac{3 + i}{2 - 3i} = \dfrac{(3 + i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \dfrac{6 + 9i + 2i - 3}{2^2 + (-3)^2} = \dfrac{3 + 11i}{13} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{11}{13}i.$

Hittills har vi arbetat med de komplexa talens så kallade algebraiska form, $z = a + bi$. Nu ska vi titta på talens geometriska tolkning och införa den så kallade polära formen, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Betrakta planet, utrustat med ett koordinatsystem som består av origo O, en x-axel och en y-axel, vinkelräta mot varandra. Givet en punkt P i planet kan vi ange dess läge genom att tala om vad P har för x- och y-koordinater, det vill säga $P(x, y)$. Vi kan i fortsättningen identifiera punkten med koordinater (x, y) med det komplexa talet $z = x + iy$, och kommer i det sammanhanget att tala om planet som det komplexa talplanet. Alla reella tal ligger då på x-axeln (som kallas realaxeln) och alla rent imaginära tal ligger på y-axeln (som kallas imaginäraxeln). Ett tal och dess komplexkonjugat motsvaras av punkter med samma realdel och motsatta imaginärdelar. Dessa punkter är därmed spegelsymmetriska med avseende på realaxeln.

Vi kommer nu att titta på ett alternativt sätt att ange en punkts läge. Istället för att ange x- och y-koordinaterna, kan vi ange punkten P:s polära koordinater, som är dess avstånd till origo r och vinkeln θ (i radianer) mellan den positiva x-axeln och strålen OP. Här arbetar vi med riktade vinklar. Vinkeln θ är positiv om man behöver rotera den positiva x-axeln moturs kring origo tills den sammanfaller med strålen OP, och θ är negativ om rotationen måste ske medurs. Principen är densamma som med de så kallade kartesiska koordinaterna (x, y). Det som händer är att vi anger punktens läge som skärningspunkt mellan två kurvor. Punkten med koordinater (x_0, y_0) är skärningspunkt mellan den vertikala linjen $x = x_0$ och den horisontella $y = y_0$. Om vi istället väljer de polära koordinaterna (r_0, θ_0), så är punkten att betrakta som skärningspunkt mellan cirkeln med medelpunkt i origo och radie r_0, och strålen som fås genom att rotera positiva realaxeln θ_0 radianer kring origo. Rotationen sker moturs om $\theta_0 > 0$, och medurs om $\theta_0 < 0$. Det är viktigt att notera att punkten origo endast har en polär koordinat, nämligen den polära radien $r = 0$. Någon polär vinkel kan i det fallet inte definieras. Vi får övriga punkter i planet, exakt en gång vardera, genom att låta den polära radien r genomlöpa intervallet $(0, \infty)$, och låta θ genomlöpa ett halvöppet intevall med längd 2π, till exempel $\theta \in [0, 2\pi)$ (det vill säga $0 \leq \theta < 2\pi$), eller $\theta \in (-\pi, \pi]$ (det vill säga $-\pi < \theta \leq \pi$). Dessa två val av intervall är de vanligaste.

Vi förfogar nu över två alternativa sätt att ange läget av en punkt i planet, eller, vilket är samma sak, ange ett komplext tal

$$\begin{aligned}
&P(x, y), \quad -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty; \\
&P(r, \theta), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \text{ för } P \neq \mathrm{O}, \quad r = 0 \text{ för } P = \mathrm{O}.
\end{aligned}$$

Låt oss se vad det finns för samband mellan de kartesiska och de polära koordinaterna. Om vi projicerar punkten P $(\neq O)$ vinkelrätt på x-axeln får vi en rätvinklig triangel med hypotenusa OP, och vi ser att

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Observera att vinkeln avläses från positiva x-axeln, att den kan vara positiv eller negativ, samt att sambanden gäller oavsett vilken kvadrant P befinner sig i. Övergången från polära till kartesiska koordinater är alltså enkel.

Övergången åt andra hållet är knepigare. Den polära radien är inget problem, samma rätvinkliga triangel som ovan ger att

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Svårigheterna uppstår när vi försöker bestämma θ, givet x och y. Problemet är att θ inte bestäms entydigt av punktens läge. Om θ_0 är en möjlig polär vinkel för den betraktade punkten, så kommer alla andra vinklar som fungerar för samma punkt att ges av $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, där k är ett godtyckligt heltal. Tillägget $2k\pi$ motsvarar ett helt antal varv runt origo. Dessa varv påverkar givetvis inte punktens läge. Även om vi bestämt oss för ett intervall med längd 2π, som beskrivet ovan, finns det inte någon fin formel som fungerar i alla lägen. Här nöjer vi oss med att visa hur man gör på konkreta exempel.

Exempel 5. Låt punkten P ha kartesiska koordinater $(1, -1)$. Vi får $r = \sqrt{2}$. Att $x > 0$ och $y < 0$ betyder att P ligger i fjärde kvadranten. Division ger $\dfrac{y}{x} = \tan\theta = -1$. Vi letar alltså efter en vinkel vars andra axel ligger i fjärde kvadranten, och som har tangens -1. En möjlighet är att välja $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, en annan är $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$.

Exempel 6. Låt nu punkten P ha kartesiska koordinater $(-1, 1)$. Vi får återigen $r = \sqrt{2}$ och $\dfrac{y}{x} = \tan\theta = -1$, men punkten ligger nu i andra kvadranten. En möjlighet för vinkeln är $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, en annan är $\theta = -\dfrac{5\pi}{4}$.

Vi kan nu skriva det komplexa talet $z = x + iy$ $(\neq 0)$ på polär form $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Talet 0 har den polära framställningen $r = 0$. Alla komplexa tal fås genom att låta r och θ variera som beskrivet ovan. I sammanhanget kallas $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ för det komplexa talets absolutbelopp (eller bara belopp), och betecknas $r = |z|$, medan θ kallas för det komplexa talets argument. Notera att argumentet är en flervärd funktion av z, det vill säga, givet ett komplext tal kan dess argument anta ett flertal olika värden, $\arg z = \theta_0 + 2k\pi$, där k är ett godtyckligt heltal. Låt oss även upprepa att $|z|^2 = z\bar{z}$, samt att $|z|$ är lika med avståndet från z till origo.

Exempel 7. $|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Exempel 8. $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

Exempel 9. $\arg(1 - i\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, k godtyckligt heltal. (Punkten ligger i fjärde kvadranten och tangens av dess argument är $-\sqrt{3}$.)

Exempel 10. $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)\right)$.

De komplexa talens polära form är mycket användbar vid multiplikation, division samt beräknig av potenser. Vi antar här att talen vi arbetar med är skilda från 0, så att alla vinklar är definierade.

Låt oss börja med att beräkna produkten av två komplexa tal på polär form, $z_{1,2} = r_{1,2}(\cos\theta_{1,2} + i\sin\theta_{1,2})$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Vi kan dra slutsatsen att komplexa tal på polär form multipliceras med varandra genom att man multiplicerar ihop deras belopp (och får produktens belopp), och lägger ihop deras argument (och får produktens argument). Vid division är förfarandet det omvända

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Ovanstående formler leder till slutsatsen att

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

för alla heltal n.

Baserat på ovanstående skulle man kanske gissa att $w = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$. En enkel kalkyl visar att det talet i kvadrat verkligen ger z. Detta är dock inte hela sanningen. Vi kan omedelbart se att även $(-w)^2 = z$. Som vi tidigare insåg kan argumentet till ett komplext tal väljas på oändligt många olika sätt, så det vore rimligt att definiera $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)$, där k är ett godtyckligt heltal. Alla dessa värden är dock inte olika. Alla jämna k kommer att ge ett tillägg på heltal $\cdot\, 2\pi$, vilket vi på grund av de trigonometriska funktionernas periodicitet kan bortse från. Alla udda k i sin tur kommer att ge ett tillägg på $\pi +$ heltal $\cdot\, 2\pi$, och vi kan återigen bortse från det hela antalet varv. Alltså får vi att $z^{\frac{1}{2}}$ har två olika värden

$$z_k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1.$$

På samma sätt kan vi övertyga oss om att $z^{\frac{1}{n}}$ för positiva heltal n har n olika värden, som ges av

$$z_k^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Exempel 11. (Igen, $k = 0, 1$.) $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|-2|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}+k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2}+k\pi)\right) = \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$.

Exempel 12. $i^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|i|}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right) = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Närmare inspektion av multiplikationsformeln för tal på polär form avslöjar att funktionen $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ har egenskapen $f(\theta_1+\theta_2) = f(\theta_1)f(\theta_2)$. Denna egenskap är karakteristisk för den reella exponentialfunktionen. Vi har därför anledning att införa beteckningen $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, för reella θ. Om vi går ytterligare ett steg i den riktningen kan vi definiera den komplexa exponentialfunktionen

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Det är intressant att notera att $e^z \neq 0$ (eftersom dess belopp aldrig kan bli 0), samt att det är en periodisk funktion med period $2\pi i$.

Ett par varningens ord:

Skriv aldrig $\sqrt{\cdot}$ med annat än icke-negativa (reella) tal under! Denna beteckning är förbehållen ”det icke-negativa tal, vars kvadrat är det som står under rottecknet”, och kan därför inte användas i andra sammanhang. Skriv $(\cdot)^{\frac{1}{2}}$ istället, och notera att det egentligen är att betrakta som en mängd av två tal, om inget annat sägs.

De komplexa talen är inte ordnade. Det betyder att man inte kan skriva olikheter mellan dem. Varje gång vi talar om positiva/negativa tal kan det därför endast handla om reella sådana. I den mån man behöver använda olikheter och uppskattningar där komplexa tal förekommer måste allt göras i termer av de komplexa talens belopp.

Exempel: Triangelolikheten. För varje par komplexa tal z_1, z_2 gäller olikheterna

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Låt oss återvända till frågorna som lämnades utan svar i början av texten. Vad är i? Det primära behovet av komplexa tal uppstår då man försöker lösa enkla algebraiska ekvationer som är olösbara inom de reella talen. En sådan ekvation är $x^2 + 1 = 0$. Det finns något djupt oroande i att säga att ekvationen saknar lösning, för att i nästa andetag kalla dess lösning för i. Så finns verkligen i? Det går inte att ta på matematiska objekt, så det går inte att övertyga sig med sina sinnen om att de finns. Man kan säga att inom matematik finns allt som inte leder till motsägelse. Med andra ord, det finns inga problem med att plocka ett abstrakt objekt ur fickan och kalla det för i, bara man är säker på att det aldrig kommer att ställa till det för resten av matematiken. Så hur kan man avgöra det? Lösningen är att konstruera en så kallad modell av teorin för de ”nya” talen inom teorin för de ”gamla”. Det gör man genom att definiera de komplexa talen som talpar av reella tal (a, b), där $(a, b) = (c, d)$ om och endast om $a = c$ och $b = d$, och där addition och multiplikation definieras som $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Det reella talet a identifieras med talparet $(a, 0)$. Det är nu fritt fram att ge definitionen för i och inse att $i^2 = -1$:

$$i = (0, 1), \qquad (0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Övningar

1. Beräkna (a) $(1 - 2i) + (3 - 2i)$; (b) $(1 - 2i) - (3 - 2i)$; (c) $(1 - 2i) \cdot (3 - 2i)$; (d) $\dfrac{1}{1 + i}$; (e) $\dfrac{1 - 2i}{3 - 2i}$; (f) $\left|\dfrac{1 + 2i}{3 + 2i}\right|$; (g) $|(1 - 2i) + (3 - 2i)|$; (h) $|1 - 2i| + |3 - 2i|$.

2. Visa att alla komplexa tal z, z_1, z_2 uppfyller

$$\bar{\bar{z}} = z, \qquad z + \bar{z} = 2a = 2\mathrm{Re}\, z, \qquad z - \bar{z} = 2bi = 2i\mathrm{Im}\, z, \qquad z\bar{z} = a^2 + b^2,$$
$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

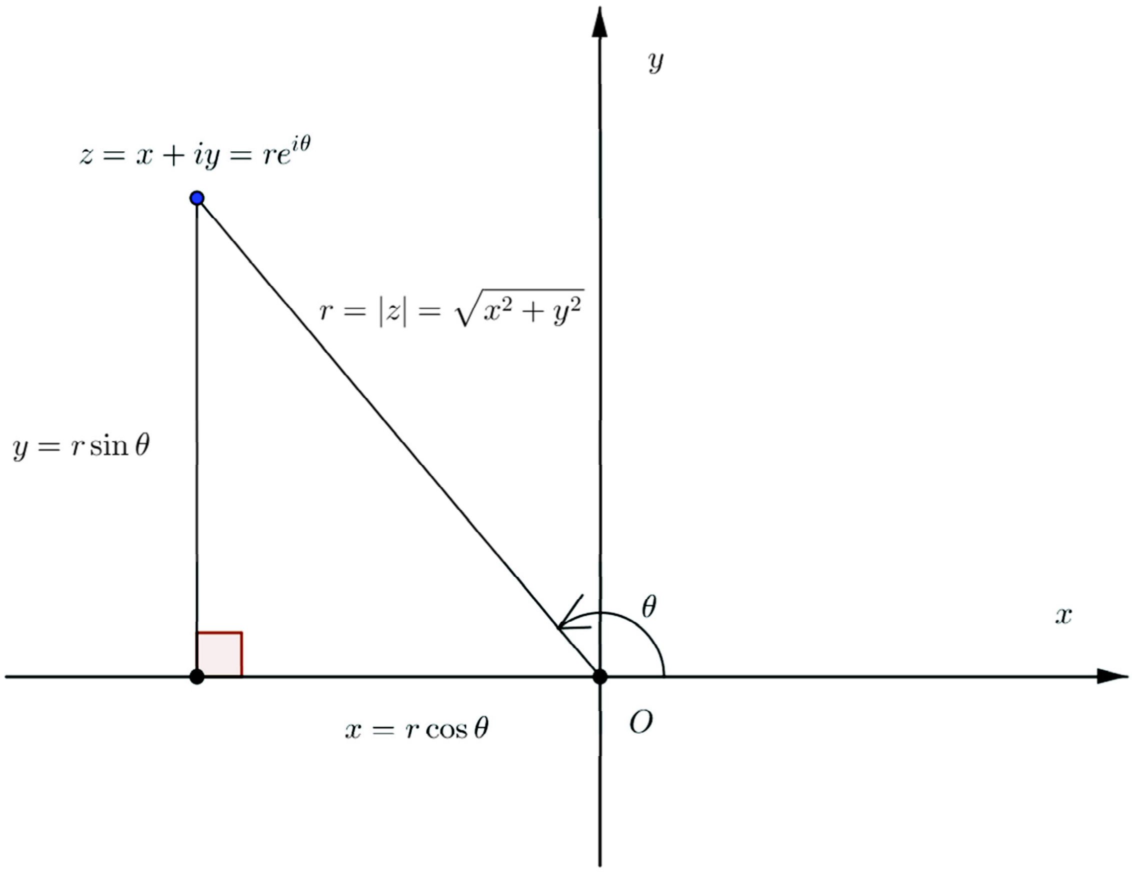
3. Visa att alla komplexa tal z, z_1, z_2 uppfyller

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \ (z \neq 0), \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \ (z_2 \neq 0).$$

4. Skriv på algebraisk form (a) $\sqrt{3}\,(\cos \pi + i \sin \pi)$; (b) $-e^{i\frac{\pi}{3}}$; (c) $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$; (d) $e^{\frac{\pi}{4}}$.

5. Skriv på polär form (a) i; (b) $-1 - i$; (c) $\sqrt{3} - i$; (d) 2.

6. Bestäm alla komplexa lösningar till ekvationen (a) $z^3 = -8$; (b) $z^4 + 2 = 0$.



I figuren är vinkeln θ positiv. Talet z har negativ realdel och positiv imaginärdel. Beloppet (absolutbeloppet) av z är alltid ett icke-negativt tal och är endast noll för $z=0$, som avbildas i punkten O (origo).

Svar till övningarna:

1. (a) $4(1-i)$; (b) -2; (c) $-(1+8i)$; (d) $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$; (e) $\frac{7}{13}-i\frac{4}{13}$; (f) $\sqrt{\frac{5}{13}}$ $(=\frac{\sqrt{65}}{13})$; (g) $4\sqrt{2}$; (h) $\sqrt{5}+\sqrt{13}$.
2. *Tips:* Skriv z på algebraisk form och använd definitionen för komplexkonjugatet.
3. *Tips:* Kvadrera likheterna. Eftersom båda leden är icke-negativa (reella) tal fås ekvivalenta likheter. Använd att produkten av z och dess konjugat är lika med z:s belopp i kvadrat.
4. (a) $-\sqrt{3}$; (b) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (c) $\sqrt{2}(1-i)$; (d) $e^{\frac{\pi}{4}}$.
5. (a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; (b) $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$; (c) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$; (d) $2e^{i0}$.
6. (a) $z_0 = -2, z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$; (b) $z_k = \sqrt[4]{2}e^{i(\pi+2k\pi)/4}, k = 0,1,2,3$.