Chalmers, Program A & Program B & Program C
Dugga 1
X september 201Y, 10:00–12:00

Skrivtid: 120 min
Inga hjälpmedel tillåtna.
OBS! Lämna *inte* in kladdpapper och lösningsskisser till uppgifterna 1–30.

Namn och program: ....

Personnummer: ....

A. Markera rätt svar genom att ringa in. (1p för varje rätt svar; OBS! Endast ett rätt svar per uppgift.)

1. Uttrycket $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3+\sqrt{11}}\cdot\sqrt{\sqrt{11}-3}}$ är lika med

   (a) 1; (b) 2; (c) $\sqrt{11}$; (d) annat svar.

2. Om $\dfrac{x}{y}=3$, så är uttrycket $\dfrac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^3+y^3}$ lika med

   (a) $\dfrac{20}{27}$; (b) $\dfrac{10}{7}$; (c) $\dfrac{1}{12}$; (d) annat svar.

3. Ekvationen $2^{x-1}\cdot 5^{x-1}=0,1\cdot 10^{2x+5}$ har lösningen

   (a) -3; (b) -4; (c) -5; (d) inget av (a)-(c).

4. Funktionen $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}-4x+1=0$ har lokalt maximum för

   (a) -1; (b) 4; (c) -1 och 4; (d) inget av (a)-(c).

5. Uttrycket $\dfrac{\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ}{\cos 20^\circ}$ är lika med

   (a) $\dfrac{1}{\cos 20^\circ}$; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) 0; (d) annat svar.

6. Om $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$ och $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, så har $\sin 2\alpha$ värdet

   (a) $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (b) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$; (c) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; (d) annat värde.

7. Om $\sin\alpha = t$ och $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, så har $\tan\alpha$ värdet

   (a) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}$; (b) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{-t}$; (d) annat värde.

8. Om $S_{1000} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{1000}}$, så gäller att $S_{1000} =$

   (a) $\dfrac{2^{1000}-1}{2}$; (b) $2(2^{1001}-1)$; (c) $\dfrac{2^{1001}-1}{2^{1000}}$; (d) annat svar.

9. En romb med sidlängd 4 l.e. och spetsig vinkel 45° har arean (i a.e.)

   (a) $4\sqrt{2}$; (b) 16; (c) $8\sqrt{2}$; (d) inget av ovanstående.

10. Det komplexa talet $e^{i\frac{23\pi}{7}}$ ligger i

    (a) första kvadranten; (b) andra kvadranten;
    (c) annan kvadrant; (d) går ej att avgöra.

11. Givet är att $re^{i\varphi} = \rho e^{i\theta}$. Då kan man *inte* dra slutsatsen att

    (a) $r = \rho$; (b) $\ln r = \ln\rho$; (c) $\varphi = \theta$; (d) $\varphi - \theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

12. Den största heltalslösningen till olikheten $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+1} > 0$ är

    (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

13. Den största heltalslösningen till olikheten $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+1} \geq 0$ är

    (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) inget av (a)-(c).

14. För alla $x < -5$ gäller att

    (a) $|\,x+5| = -x+5$;
    (b) $|\,x+5| > |\,x|$;
    (c) $|\,x| > |\,x+1|$;
    (d) inget av ovanstående.

15. För alla $x > 5$ gäller att

(a) $|\,x + 5| = x - 5$;
(b) $|\,x + 5| > |\,x|$;
(c) $|\,x| > |\,x + 1|$;
(d) inget av ovanstående.

B. Lös uppgifterna nedan; ange endast svar. (2p för varje rätt svar)

16. Beräkna

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{7}}{\frac{1}{4} - \frac{5}{12}}.$$

Ange svaret på formen $\dfrac{p}{q}$, där p, q är relativt prima heltal.

Svar:

17. Givet är att $e^a = 32$. Beräkna och ange $\ln 4$, uttryckt i a.

Svar:

18. Givet funktionen $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{2x^2 + x + 7}$, ange $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

Svar:

19. Om funktionen f är sådan att $f(x + 3) = 7x - 1$, ange $f(10)$.

Svar:

20. Ange den minsta lösningen till ekvationen $\sqrt{2 - x} = 10 + x$.

Svar:

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten

$$|\,x^2 - 5x + 2| \leq 4.$$

Fuskdugga - SVAR

A.

1b
2d
3c
4a
5d
6b
7d
8c
9c
10c
11c
12a
13b
14c
15b

B.

16: $-\frac{46}{7}$
17: $\frac{2a}{5}$
18: $-\frac{41}{196}$
19: 48
20: -7

C. *Lösning:* Polynomet $p(x) = x^2 - 5x + 2$ har nollställena $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Vi har $p(x) < 0$ för $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$, och $p(x) \geq 0$ för $x \leq \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ eller $x \geq \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.

Fall 1: $x^2 - 5x + 2 \geq 0$, d.v.s. $x \leq \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$ eller $x \geq \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$. Olikheten blir då $x^2 - 5x - 2 \leq 0$, vilket uppfylls för $\dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$. Eftersom x dessutom måste vara sådant att $x^2-5x+2 \geq 0$, får vi att olikheten $|x^2-5x+2| \leq 4$ i det fallet gäller för $\dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \leq x \leq \dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$, och för $\dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$.

Fall 2: $x^2 - 5x + 2 < 0$, d.v.s. $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$. Olikheten blir då $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, vilket uppfylls för $x \leq 2$ samt för $x \geq 3$. För att även $x^2 - 5x + 2 < 0$ ska gälla måste vi ha $\dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < x \leq 2$ eller $3 \leq x < \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.

Lösningsmängden till den givna olikheten består alltså av alla x sådana att $\dfrac{5-\sqrt{33}}{2} \leq x \leq 2$, eller $3 \leq x \leq \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$.