MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2010–10–23 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Peter Helgesson
Telefon: 0703 088 304

TMV225 Inledande Matematik M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 3: 20–29 p, 4: 30–39, 5: 40–50.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller den räta linjen

$$l_1 : \quad x + 5 = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2}$$

och är parallellt med skärningslinjen mellan de två planen $2x - y + z = 3$ och $x + 2y - 3z = -5$. (4 p)

(b) Bestäm minsta avståndet från origo till planet i uppgift (a). (2 p)

3. (a) Ur en cylindrisk trädstam med radien 3 dm skall sågas en balk med rektangulärt tvärsnitt. Böjmotståndet W (som har enheten dm^3) hos en sådan balk ges av formeln

$$W = \frac{xy^2}{6}$$

där x betecknar bredden och y höjden. Hur skall balken dimensioneras för att böjmotståndet skall bli maximalt? (3 p)

(b) Antag att böjmotståndet inte får avvika från det optimala med mer än 10 dm^3. Uppskatta hur stor avvikelsen från den optimala bredden får vara för att detta skall vara uppfyllt. Ledning: Använd Lipschitz-villkoret. (3 p)

4. Rita grafen till (6 p)

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}.$$

5. (a) Skriv en funktionsfil `SecondDerivative.m` som givet en funktion `f` och en punkt `x` använder differenskvoten

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

till att beräkna ett approximativt värde på andraderivatan till `f` i `x`. Du kan sätta $h = 10^{-5}$. (2 p)

(b) Skriv en funktionsfil `KritiskNewton.m` som givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` använder Newtons metod till att beräkna en kritisk punkt till `f` (dvs löser ekvationen $f'(x) = 0$). Du kan anta att programmet `Derivative.m` från datorövning 6 är given. Ledning: Använd även `SecondDerivative.m` från uppgift (a) ovan. (4 p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera svaren. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

(a) Om f ej är kontinuerlig i punkten x_0 så är f ej deriverbar i x_0.

(b) För alla komplexa tal z och w gäller att $|zw| = |z||w|$.

(c) Om x_0 är en kritisk punkt till f och $f''(x_0) = 0$ så kan inte x_0 vara en minimi-punkt.

(d) Om f' är växande på ett intervall I så är också f växande på I.

(e) Om f är deriverbar på ett intervall I så är f Lipschitz-kontinuerlig på I.

(f) Om f har två fixpunkter på ett intervall I, så kan f inte vara en kontraktionsavbildning på I.

7. (a) Formulera Bolzanos sats och ange de fyra huvudstegen i beviset. (2 p)

(b) Formulera och bevisa satsen om mellanliggande värden för Lipschitz-kontinuerliga funktioner. (4 p)

8. (a) Skriv ned definitionen av att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a. (1 p)

(b) Skriv ned definitionen av att en funktion f är deriverbar i en punkt a. (1 p)

(c) Antag att f och g är två deriverbara funktioner på ett intervall I. Visa att om

$$f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in I$$

så gäller att

$$f(x) = g(x) + C \qquad \forall x \in I$$

för någon konstant C. (Obs! Integrering är inte en godtagbar lösning.) (4 p)

Lycka till!

Hossein och Stig

Anonym kod	**TMV225 Inledande Matematik M 2010–10–23**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} 3x + 7y + 7z = 6 \\ 2x + 6y + 10z = -4 \\ \phantom{3x + {}} y + 4z = -5. \end{cases}$$

Lösning:

Svar: ....

(b) Antag att $f(1) = 1$ och $f'(1) = 2$. Beräkna $g'(1)$ om $g(x) = (x + f(x)^2)^3$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $f(x) = x^3 + 2x$. Visa att f är injektiv och beräkna $(f^{-1})'(3)$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna $\cos(2\arctan(\frac{3}{4}))$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

[Blank sida.]

Lösningar: TMV225 Inledande Matematik M 2010–10–23

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2 p)

$$\begin{cases} 3x + 7y + 7z = 6 \\ 2x + 6y + 10z = -4 \\ \phantom{2x+{}} y + 4z = -5. \end{cases}$$

Lösning:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 & | & 6 \\ 2 & 6 & 10 & | & -4 \\ 0 & 1 & 4 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 & | & 6 \\ 0 & 4 & 16 & | & 24 \\ 0 & 1 & 4 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 7 & 7 & | & 6 \\ 0 & 1 & 4 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & -11 \end{bmatrix}$$

Svar: Ingen lösning.

(b) Antag att $f(1) = 1$ och $f'(1) = 2$. Beräkna $g'(1)$ om $g(x) = (x + f(x)^2)^3$. (2 p)
Lösning:

$$g'(x) = 3(x + f(x))^2(1 + 2f(x)f'(x))$$
$$g'(1) = 3(1 + 1)^2(1 + 4) = 60$$

Svar: 60

(c) Låt $f(x) = x^3 + 2x$. Visa att f är injektiv och beräkna $(f^{-1})'(3)$. (2 p)
Lösning:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad f \text{ är strängt växande} \quad \Rightarrow \quad f \text{ är injektiv}$$
$$f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(3) = 1$$
$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

Svar: 1/5

(d) Beräkna $\cos(2\arctan(\frac{3}{4}))$. (2 p)
Lösning: Låt α vara ena vinkeln i en rätvinklig triangel med sidorna 4, 3, 5, så att $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ och $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Då fås

$$\cos(2\arctan(\tfrac{3}{4})) = \cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

Svar: 7/25

2. (a) Skärningslinjen l_2 ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

Gauss eliminationsmetod ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & -\frac{13}{5} \end{array}\right]$$

med lösningen, dvs en ekvation för linjen l_2,

$$l_2 : \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}t \\ y = -\dfrac{13}{5} + \dfrac{7}{5}t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Vi ser att $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ är en riktningsvektor för l_2.
I ekvationen för den givna linjen l_1 läser vi av en punkt på linjen och en riktningsvektor:

$$P = (-5, 3, 1), \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

En normalvektor för det sökta planet fås av

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Vi väljer normalvektorn $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Eftersom $P = (-5, 3, 1)$ ligger i planet blir ekvationen

$$\begin{aligned} &2(x + 5) - (y - 3) + (z - 1) = 0 \\ &2x - y + z = -12 \end{aligned}$$

(b) Avståndet är absolutbeloppet av skalära projektionen av ortsvektorn $\overrightarrow{OP} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ på normalvektorn $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$:

$$s = |\overrightarrow{OP} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \left|\overrightarrow{OP} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| = \left|\frac{(-5, 3, 1) \cdot (2, -1, 1)}{\sqrt{4 + 1 + 1}}\right| = \left|\frac{-12}{\sqrt{6}}\right| = 2\sqrt{6}$$

3. (a) Balkens tvärsnitt är en rektangel med bredden x och höjden y vars hörn ligger på en cirkel med radien $R = 3$ dm. Det betyder att

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = R^2, \quad \text{dvs } y^2 = 4R^2 - x^2 = 36 - x^2.$$

Vi eliminerar y ur $W = \frac{1}{6}xy^2$ och får en funktion av x:

$$W(x) = \frac{1}{6}x(36 - x^2), \quad x \in [0, 6].$$

Vi söker dess maximum. Derivatan är

$$W'(x) = \frac{1}{6}(36 - 3x^2) = \frac{1}{2}(12 - x^2).$$

Maximum lokaliseras bland följande punkter i intervallet $[0, 6]$.

singulära punkter: inga

kritiska punkter: $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

randpunkter: 0, 6

x	0		$2\sqrt{3}$		6
$W'(x)$	6	$+$	0	$-$	-12
$W(x)$	0	$\uparrow$	$8\sqrt{3}$	$\downarrow$	0

Vi ser att maximum inträffar då bredden är $a = 2\sqrt{3}$.

(b) Vi börjar med att beräkna en Lipschitz-konstant för W på intervallet $[0, 6]$. Vi har $W''(x) = -x < 0$ för $x > 0$, så att $W'(x)$ är strängt avtagande på intervallet. Vi ser i tabellen att $W'(x)$ avtar från 6 till -12. Det betyder att maximum för $|W'(x)|$ är $|W'(6)| = 12$. Alltså kan vi ta

$$L = \max_{x \in [0,6]} |W'(x)| = 12.$$

Alternativt:

$$|W'(x)| = |\tfrac{1}{2}(12 - x^2)| = \tfrac{1}{2}|12 - x^2| \leq \tfrac{1}{2}(12 + x^2) \leq \tfrac{1}{2}(12 + 36) = 24 \quad \forall x \in [0, 6],$$

vilket leder till den lite sämre Lipschitz-konstanten $L = 24$.

Vi har de optimala värdena $a = 2\sqrt{3}$ och $W(a) = 8\sqrt{3}$. Vi vill bestämma en tolerans för felet $|x - a|$ som garanterar att felet $|W(x) - W(a)| \leq 10$.

Lipschitz-villkoret ger att

$$|W(x) - W(a)| \leq L|x - a| \leq 10$$

blir uppfyllt om

$$|x - a| \leq \frac{10}{L} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

Vi väljer toleransen $5/6$. Alternativt: med $L = 24$ blir toleransen $5/12$.

4. Vi beräknar derivatorna:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1,$$
$$f'(x) = \frac{2x(x+1)^2 - x^2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2x}{(x+1)^3},$$
$$f''(x) = \frac{2(x+1)^3 - 2x \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = -4\frac{x-\frac{1}{2}}{(x+1)^4}.$$

Vi hittar följande:

singulär punkt: $x = -1$,
kritisk punkt: $x = 0$,
inflektionspunkt: $x = \frac{1}{2}$.

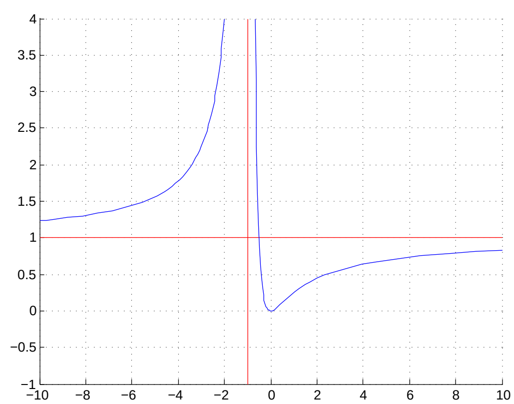
Gränsvärden:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(1+1/x)^2} = 1,$$
$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \infty.$$

Teckentabell:

x		-1		0	
$f'(x)$	$+$	odef	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	odef	$\downarrow$	0	$\uparrow$

Funktionen är konvex på $(-\infty, -1)$, $(-1, \frac{1}{2}]$ och konkav på $[\frac{1}{2}, \infty)$. Vertikal asymptot: $x = -1$. Horisontell asymptot: $y = 1$.



5. (a)
```
function y=SecondDerivative(f,x)
h=1e-5;
y=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/(h^2);
```
(b)
```
function x = KritiskNewton(f,x0,tol)
x = x0;
h = tol + 1;

while abs(h)>tol
   b = -Derivative(f,x);
   a = SecondDerivative(f,x);
   h = b/a;
   x = x + h;
end
```

6. (a) sant

(b) sant

(c) falskt

(d) falskt

(e) falskt

(f) sant

7. Se kompendiet ”Beräkningsmatematik”.

8. (a) Se Adams.

(b) Se Adams.

(c) Med $h(x) = f(x)-g(x)$ har vi $h'(x) = 0\ \forall x \in I$. Då ger ”Satsen om konstant funktion” (Adams 2.8 Theorem 13) att $h(x) = C\ \forall x \in I$. Det vill säga att $f(x) = g(x) + C$ $\forall x \in I$.

Alternativt kan vi använda medelvärdessatsen. Låt x_1, x_2 vara två punkter i I med $x_1 < x_2$. Använd medelvärdessatsen på funktionen $h(x) = f(x) - g(x)$ och intervallet $[x_1, x_2]$. Vi får en punkt $c \in (x_1, x_2)$ sådan att

$$\frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} = h'(c).$$

Men $h'(c) = 0$, eftersom $h'(x) = 0$ för alla $x \in I$. Det följer att $h(x_2) - h(x_1) = 0$ för alla $x_1, x_2 \in I$, och därmed att h är konstant, dvs $f(x) = g(x) + C\ \forall x \in I$. Vilket skulle bevisas.