MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2011-01-15 kl. 8.30–12.30

Tentamen | Telefonvakt: Oskar Hamlet

Telefon: 0703 088 304

TMV225 Inledande Matematik M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. Låt l vara skärningslinjen mellan de två planen $\pi_1 : y = 1$ och $\pi_2 : x - z = 1$, och låt $P_0 = (2, -2, 1)$.

(a) Beräkna det minsta avståndet från P_0 till l. (3 p)

(b) Bestäm koordinaterna för P_0:s spegelbild i l. (3 p)

3. Rita grafen till (6 p)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

4. Beräkna följande gränsvärden (utan l'Hospitals regel) (3+3 p)

(a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^4 + x^2 + 1} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$

5. (a) Låt f vara en funktion som är definierad på intervallet $[a, b]$. Bestäm det unika polynom $P^f_{[a,b]}(x)$ av grad 1 för vilket $P^f_{[a,b]}(a) = f(a)$ och $P^f_{[a,b]}(b) = f(b)$. (Polynomet $P^f_{[a,b]}$ kallas interpolationspolynom av grad 1 till f och kan användas till att approximera funktionen på intervallet $[a, b]$.) (2 p)

(b) Låt c beteckna mittpunkten på intervallet $[a, b]$. Skriv en MATLAB-funktionsfil som givet indata f, x, a och b beräknar följande funktion (4 p)

$$g(x) = \begin{cases} P^f_{[a,c]}(x) & \text{om } x \in [a, c], \\ P^f_{[c,b]}(x) & \text{om } x \in [c, b]. \end{cases}$$

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera svaren. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

(a) Linjen $l : (x, y, z) = (0, -5, 3) + t(-1, -3, 2), t \in \mathbb{R}$, är skärningslinjen mellan planen $\pi_1 : x + y + 2z = 1$ och $\pi_2 : 2x + z = 3$.

(b) För det komplexa talet $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ gäller att $|z| = 1$ och $\arg(z) = \frac{5\pi}{6}$.

(c) Om en funktion är diskontinuerlig på ett intervall I, så kan den inte vara Lipschitz-kontinuerlig på I.

(d) Om f är växande på ett intervall I så är också f' växande på I.

(e) Om f är begränsad på ett intervall I så är f' begränsad på I.

(f) En strängt växande funktion kan ha högst en fixpunkt.

7. (a) Formulera kontraktionsavbildningssatsen och ange de fyra huvudstegen i beviset. (2 p)

(b) Definiera vad som menas med att en kontinuerlig funktion f är strängt växande på ett intervall $[a, b]$. Visa att om f är deriverbar på (a, b) så gäller att om $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$ så medför detta att f är strängt växande på $[a, b]$. (4 p)

8. (a) Skriv ned definitionen av skalärprodukten mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, och formulera den sats som relaterar skalärprodukten till vektorernas mellanliggande vinkel. (2 p)

(b) Visa att $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. (2 p)

(c) Visa att om $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, så gäller att (2 p)

$$-\sqrt{3} \leq x + y + z \leq \sqrt{3}.$$

(Ledning: Använd (b).)

Lycka till!

Hossein och Stig

Anonym kod	**TMV225 Inledande Matematik M 2011-01-15**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös olikheten $|5x-3|<2$ (svara med intervall). (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm konstanten $k \in \mathbb{R}$ så att funktionen (2 p)

$$f(x) = \begin{cases} kx+1, & \text{om } x \geq 2 \\ -x+k, & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm $f'(1)$ om $f(x) = \left(\frac{x}{g(x)}\right)^2$ där $g(1) = 1$ och $g'(1) = 2$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x) = \arcsin(x)$ på intervallet $I = [0, 1/2]$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

Lösningar: TMV225 Inledande Matematik M 2011-01-15

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös olikheten $|5x-3|<2$ (svara med intervall). (2 p)

Lösning:

$$|x-\tfrac{3}{5}|<\tfrac{2}{5}, \quad -\tfrac{2}{5}<x-\tfrac{3}{5}<\tfrac{2}{5}, \quad \tfrac{3-2}{5}<x<\tfrac{3+2}{5}$$

Svar: $x\in(\frac{1}{5},1)$

(b) Bestäm konstanten $k\in\mathbb{R}$ så att funktionen (2 p)

$$f(x)=\begin{cases} kx+1, & \text{om } x\geq 2 \\ -x+k, & \text{om } x<2 \end{cases}$$

blir kontinuerlig.

Lösning:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=2k+1 \\ &\lim_{x\to 2^-} f(x)=-2+k \\ &\text{vi måste ha } 2k+1=-2+k \end{aligned}$$

Svar: $k=-3$

(c) Bestäm $f'(1)$ om $f(x)=\left(\frac{x}{g(x)}\right)^2$ där $g(1)=1$ och $g'(1)=2$. (2 p)

Lösning:

$$\begin{aligned} f'(x)&=2\,\frac{x}{g(x)}\,D\frac{x}{g(x)}=2\,\frac{x}{g(x)}\,\frac{g(x)-xg'(x)}{g(x)^2} \\ f'(1)&=2\,\frac{1}{1}\,\frac{1-1\cdot 2}{1^2}=-2 \end{aligned}$$

Svar: -2

(d) Beräkna en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x)=\arcsin(x)$ på intervallet $I=[0,1/2]$. (2 p)

Lösning:

$$\begin{aligned} &|f'(x)|=\left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{är växande på } I\text{, maximum i högra ändpunkten} \\ &L=\max_{x\in I}|f'(x)|=f'(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. (a) $\pi_1: y = 1$, $\pi_2: x - z = 1$. Skärningslinjen l ges ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ \quad\; y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \;\; x + 0y - \;\; z = 1 \\ 0x + \;\; y + 0z = 1 \end{cases}$$

Systemet är på trappstegsform, z är fri, $z = t$, $y = 1$, $x = 1 + t$. Linjens ekvation på parameterform:

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

Vi läser av en punkt på linjen: $P_1 = (1, 1, 0)$ och en riktningsvektor: $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Den givna punkten är $P_0 = (2, -2, 1)$. Vi bildar vektorn $\mathbf{a} = \overline{P_1P_0} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ och räknar ut vektorprojektionen av $\mathbf{a}$ på $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{a_v} = (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k})}{1^2 + 1^2}(\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Vi får en uppdelning av vektorn $\mathbf{a}$ i ortogonala komponenter:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_v} + \mathbf{n} \quad \text{där} \quad \mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{a_v} = (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -3\mathbf{j}$$

Avståndet mellan P_0 och l är $d = |\mathbf{n}| = 3$.

(b) Spegelbilden P_2 av P_0 i l ges av

$$\begin{aligned} \overline{OP_2} &= \overline{OP_0} - 2\mathbf{n} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 2(-3\mathbf{j}) = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ P_2 &= (2, 4, 1) \end{aligned}$$

Man kan också skriva

$$P_2 = P_0 - 2\mathbf{n} = (2, -2, 1) - 2(-3\mathbf{j}) = (2, 4, 1)$$

3.

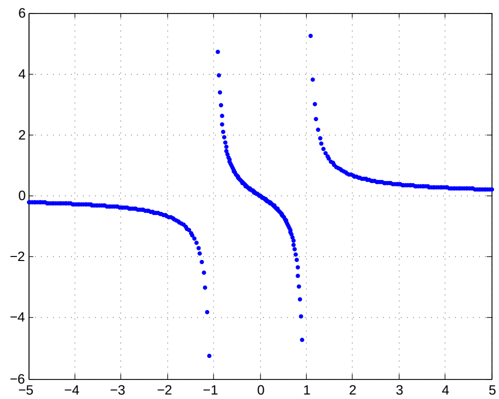
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1 \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \\ f''(x) &= -\frac{2x \cdot (x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} \quad \text{(förkorta med } x^2 - 1) \\ &= -\frac{2x((x^2 - 1) - 2(x^2 + 1))}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

Vi ser att $f'(x) < 0$ för alla $x \neq \pm 1$ och $f''(x) = 0$ endast då $x = 0$. Vi har

singulära punkter: $x = \pm 1$, kritiska punkter: inga, randpunkter: inga, inflektionspunkt: $x = 0$

Gränsvärden:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x^2(1-x^{-2})} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x(1-x^{-2})} = 0$$



4. (a)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4-x^2+1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^4-x^2+1})(\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1})}{\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^4+x^2+1)-(x^4-x^2+1)}{\sqrt{x^4+x^2+1}+\sqrt{x^4-x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2\sqrt{1+x^{-2}+x^{-4}}+x^2\sqrt{1-x^{-2}+x^{-4}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{1+x^{-2}+x^{-4}}+\sqrt{1-x^{-2}+x^{-4}}} = \frac{2}{1+1} = 1
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))}{(x-\frac{1}{2}x^2+O(x^3))-x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)}{-\frac{1}{2}x^2+O(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+O(x^2)}{-1+O(x)} = -1
\end{aligned}
$$

5. (a) Vi söker polynomet $P^f_{[a,b]}(x) = A + Bx$, där koefficienterna A, B bestäms av ekvationssystemet

$$
\begin{aligned}
A + Ba &= f(a) \\
A + Bb &= f(b)
\end{aligned}
$$

med lösningen

$$
B = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad A = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,a
$$

Polynomet blir

$$
\begin{aligned}
P^f_{[a,b]}(x) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a) \\
&= f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}
\end{aligned}
$$

(b)
```
function y=gpoly(f,x,a,b)

c=(a+b)/2;
if x<c
    y=f(a)*(c-x)/(c-a)+f(c)*(x-a)/(c-a);
else
    y=f(c)*(b-x)/(b-c)+f(b)*(x-c)/(b-c);
end
```

6. (a) sant

(b) sant

(c) sant

(d) falskt

(e) falskt

(f) falskt

7. (a) Se kompendiet.

(b) Funktionen f är strängt växande på $[a, b]$ om $a \leq x < y \leq b$ medför att $f(x) < f(y)$. Antag nu att f är deriverbar med $f'(x) > 0$ för alla $x \in (a, b)$. Tag två tal $x, y \in [a, b]$ med $x < y$. Tillämpa medelvärdessatsen på intervallet $[x, y]$. Satsen ger ett tal $c \in (x, y)$ sådant att

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

Eftersom $y - x > 0$ och $f'(c) > 0$ får vi $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$ Alltså: $f(y) > f(x)$, vilket skulle visas.

8. (a) Se boken.

(b) Se boken.

(c) Antag att $x^2 + y^2 + z^2$. Tag $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ och $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ i uppgift (b). Vi får $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$, där

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x + y + z, \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{3}, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = 1 \text{ (enligt antagandet)}$$

Alltså: $|x + y + z| \leq \sqrt{3}$, dvs $-\sqrt{3} \leq x + y + z \leq \sqrt{3}$.