MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2011-10-22 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Hossein Raufi
Telefon: 0703 088 304

TMV225/176 Inledande Matematik M/TD

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Denna uppgift omfattar 8 p och finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

Till följande uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

2. (a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller den räta linjen (3 p)

$$l_1 : \quad x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

och är parallell med

$$l_2 : \quad \frac{x+1}{3} = y+7 = \frac{z-2}{2}.$$

(b) Låt $\mathbf{x}_0 = (4,3,7)$. Bestäm koordinaterna för punkten $\mathbf{x}_0$:s spegelbild i planet från uppgift (a). (3 p)

3. Rita grafen till (6 p)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}.$$

4. Beräkna följande gränsvärden (utan att använda l'Hospitals regel) (3+3 p)

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin(2x)}$

5. (a) Beskriv hur bisektionsalgoritmen fungerar utifrån de fyra huvudstegen i algoritmen. (2 p)

(b) Skriv en MATLAB-funktionsfil `bisect.m` som givet en funktion `f`, ett intervall `[a,b]` och en tolerans `tol`, implementerar bisektionsalgoritmen på denna data. Innan själva algoritmen kontrolleras först om funktionen har olika tecken i ändpunkterna på intervallet. Om så ej är fallet avbryts programmet. (4 p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera svaren. Rätt svar ger 1 p, inget svar 0 p och fel svar -1 p. Dock ej mindre än 0 p totalt.

(a) För alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ gäller att $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

(b) Om $f''(x) > 0$ för alla x så kan inte f vara injektiv.

(c) För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $\cos x \sin x \leq \frac{1}{2}$.

(d) Antag att f är en deriverbar funktion. Om f är begränsad så är även f' begränsad.

(e) Om $f''(x)$ existerar för alla $x \in \mathbb{R}$ så måste $f'(x)$ vara kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$.

(f) Om f är två gånger deriverbar och har ett lokalt maximum i $x = 0$ så måste $f''(0) < 0$.

7. (a) Formulera Bolzanos sats och ange de fyra huvudstegen i beviset. (2 p)

(b) Visa att (4 p)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

8. (a) Skriv ned definitionen av att f är kontinuerlig i en punkt a. (1 p)

(b) Skriv ned definitionen av att f är Lipschitz-kontinuerlig på ett intervall I. (1 p)

(c) Antag att f och g är två kontinuerliga funktioner på ett intervall $[a, b]$ med $f(a) < g(a)$ och $f(b) > g(b)$. Visa att det existerar ett tal $c \in (a, b)$ sådant att $f(c) = g(c)$. (4 p)

Lycka till!

Hossein och Stig

Anonym kod	**TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 2011-10-22**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm skärningspunkten mellan de två räta linjerna $x - 5y = 1$ och $3x - 7y = 5$ med hjälp av Gausselimination. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Antag att $f(7) = 2$ och $f'(7) = 5$. Beräkna $g'(7)$ om $g(x) = \frac{x}{f(x)^3}$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $f(x) = e^x + \ln(x)$ där $x > 0$. Visa att f är injektiv och beräkna $(f^{-1})'(e)$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Beräkna en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x) = \ln(x + 2)$ på intervallet $I = [-1, 2]$. (2 p)

Lösning:

Svar: ....

Anonym kod	TMV225/176 Inledande Matematik M/TD 2011-10-22	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm skärningspunkten mellan de två räta linjerna $x - 5y = 1$ och $3x - 7y = 5$ med hjälp av Gausselimination. (2 p)

Lösning:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{array}\right] \overset{-3}{\cong} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{array}\right] \overset{1/8}{\cong} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right] \overset{5}{\cong} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = 9/4 \\ y = 1/4 \end{cases}$$

Svar: $P = (9/4, 1/4)$

(b) Antag att $f(7) = 2$ och $f'(7) = 5$. Beräkna $g'(7)$ om $g(x) = \frac{x}{f(x)^3}$. (2 p)

Lösning:

$$g'(x) = \frac{f(x)^3 - x \cdot 3 f(x)^2 f'(x)}{f(x)^6}$$

$$g'(7) = \frac{2^3 - 7 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5}{2^6} = \frac{2 - 7 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} = \frac{2 - 105}{16} = -\frac{103}{16}$$

Svar: $g'(7) = -\frac{103}{16}$

(c) Låt $f(x) = e^x + \ln(x)$ där $x > 0$. Visa att f är injektiv och beräkna $(f^{-1})'(e)$. (2 p)

Lösning:

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$ då $x > 0 \Rightarrow f$ strängt växande

$\Rightarrow f$ injektiv

$f(1) = e$, $f'(1) = e + 1$, $\begin{cases} y = f(x), \\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \end{cases}$ $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e+1}$

Svar: $\frac{1}{e+1}$

(d) Beräkna en Lipschitz-konstant till funktionen $f(x) = \ln(x + 2)$ på intervallet $I = [-1, 2]$. (2 p)

Lösning: $|f'(x)| = \left|\frac{1}{x+2}\right| = \frac{1}{x+2}$ är avtagande på I

Därför blir $\max_I |f'(x)| = |f'(-1)| = \frac{1}{-1+2} = 1$

Svar: $L = 1$

TMV 176/225 2011-10-22

(1

2 a) l_1: $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$

en riktningsvektor: $\underline{v}_1 = 1\underline{i} + 2\underline{j} - 1\underline{k}$ för l_1

en punkt: $P_1 = (0, -1, 1)$ på l_1, med

ortsvektor $\underline{r}_1 = 0\underline{i} - 1\underline{j} + 1\underline{k}$.

l_2: $\frac{x+1}{3} = y+7 = \frac{z-2}{2}$

en riktningsvektor: $\underline{v}_2 = 3\underline{i} + 1\underline{j} + 2\underline{k}$ för l_2

En normalvektor för planet:

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (4+1)\underline{i} - (2+3)\underline{j} + (1-6)\underline{k} =$$

$$= 5\underline{i} - 5\underline{j} - 5\underline{k} = 5(\underline{i} - \underline{j} - \underline{k})$$

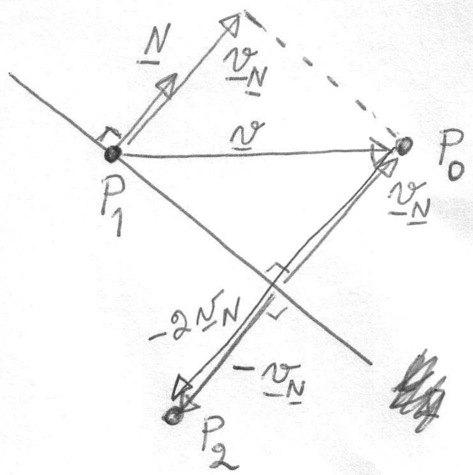
Vi väljer $\underline{N} = \underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$.

Planets ekvation: $(\underline{r} - \underline{r}_1) \cdot \underline{N} = 0$

$$(x-0) - (y-(-1)) - (z-1) = 0$$

$$x - y - z = 0$$

2b)



$$\underline{v} = \overrightarrow{P_1P_0} = (4-0)\underline{i} + (3-(-1))\underline{j} + (7-1)\underline{k}$$

$$= 4\underline{i} + 4\underline{j} + 6\underline{k}$$

vektorprojektionen:

$$\cancel{\underline{v}_N = \underline{v}\circ\hat{\underline{N}} = \underline{v}\circ !}$$

$$\underline{v}_N = (\underline{v}\circ\hat{\underline{N}})\hat{\underline{N}} = \left(\underline{v}\circ\frac{\underline{N}}{|\underline{N}|}\right)\frac{\underline{N}}{|\underline{N}|} = \frac{\underline{v}\circ\underline{N}}{|\underline{N}|^2}\underline{N} =$$

$$= \frac{(4\underline{i}+4\underline{j}+6\underline{k})\circ(\underline{i}-\underline{j}-\underline{k})}{1^2+(-1)^2+(-1)^2}(\underline{i}-\underline{j}-\underline{k})$$

$$= \frac{-6}{3}(\underline{i}-\underline{j}-\underline{k}) = -2(\underline{i}-\underline{j}-\underline{k})$$

Ortsvektorn för spegelbilden P_2:

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_0 - 2\underline{v}_N = 4\underline{i} + 3\underline{j} + 7\underline{k} + 4(\underline{i}-\underline{j}-\underline{k})$$

$$= 8\underline{i} - 1\underline{j} + 3\underline{k}.$$

Koordinater för P_2:

$$P_2 = (8, -1, 3)$$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{6x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = -6\,\frac{(x^2-4)^2 - x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = 6\,\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^{-2}}{1-4x^{-2}} = 1$$

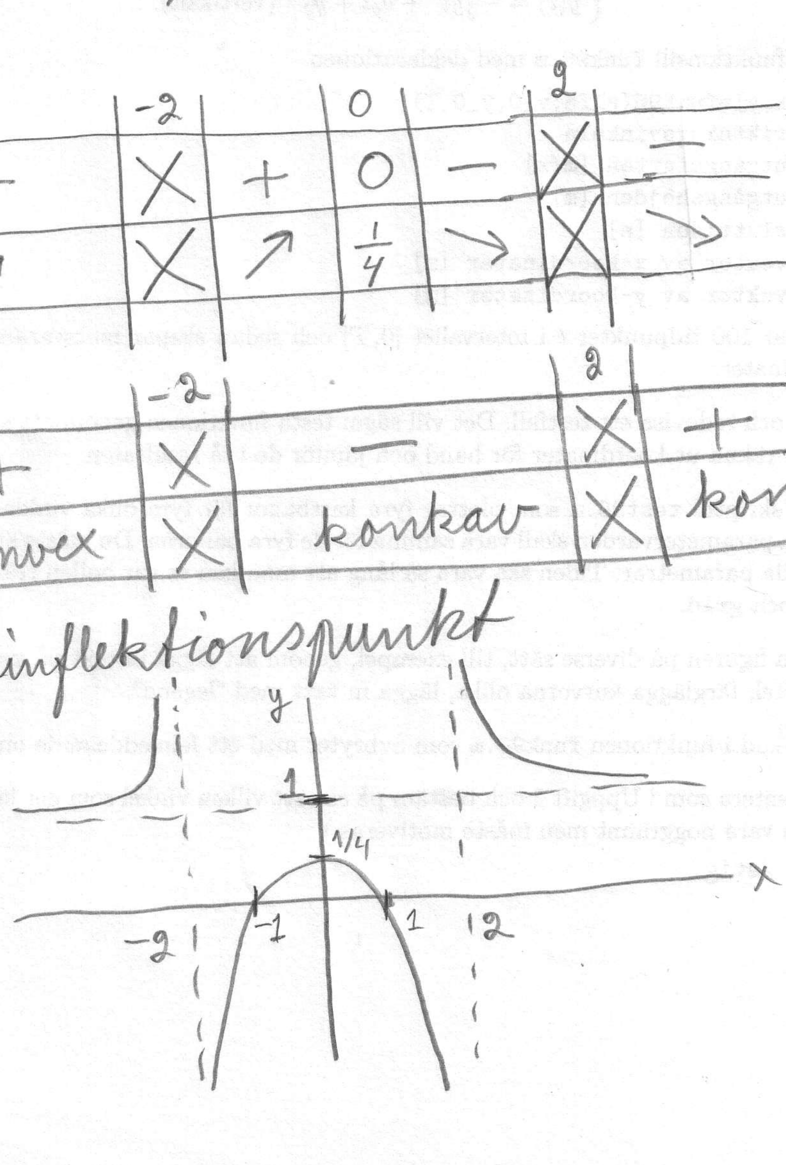
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$

x		-2		0		2	
$f'(x)$	$+$	X	$+$	0	$-$	X	$-$
$f(x)$	↗	X	↗	$\frac{1}{4}$	↘	X	↘

x		-2		2	
$f''(x)$	$+$	X	$-$	X	$+$
$f(x)$	konvex	X	konkav	X	konvex

ingen inflektionspunkt



4a) $$\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3+1)} = \frac{\ln(x^2(1+x^{-2}))}{\ln(x^3(1+x^{-3}))} =$$

$$= \frac{\ln(x^2)+\ln(1+x^{-2})}{\ln(x^3)+\ln(1+x^{-3})} =$$

$$= \frac{2\ln(x)+\ln(1+x^{-2})}{3\ln(x)+\ln(1+x^{-3})}$$

$$= \frac{2+\frac{\ln(1+x^{-2})}{\ln(x)}}{3+\frac{\ln(1+x^{-3})}{\ln(x)}} \to \frac{2}{3} \text{ då } x\to\infty$$

ty $\ln(1+x^{-2})\to 0$, $\ln(1+x^{-3})\to 0$

och $\frac{1}{\ln(x)} \to 0$. <u>Svar</u>: $\frac{2}{3}$

4b) $$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(2x)} =$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3+O(x^5)\right)}{x^2\left(2x+O(x^3)\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^3+O(x^5)}{2x^3+O(x^5)} = \frac{-\frac{1}{3}+O(x^2)}{2+O(x^2)} \to$$

$\to -\frac{1}{6}$ då $x\to 0$ <u>Svar</u>: $-\frac{1}{6}$

5) Se kompendiet BM och datorövning 3.

6) SFSFSF

7a) Se BM

7b) Se Adams 2.5.

8 a) Se Adams 1.5.

b) Se BM.

c) Bilda $F(x) = f(x) - g(x)$.
Då är F kontinuerlig på $[a, b]$
och $F(a) = f(a) - g(a) < 0$,
$F(b) = f(b) - g(b) > 0$.
Bolzanos sats ger att det finns $c \in (a, b)$ sådan att $F(c) = 0$,
dvs $f(c) = g(c)$.

/stig