MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2012-10-27 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Oskar Hamlet
Telefon: 0703 088 304

TMV225 Inledande Matematik M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. $(7 \times 2 \text{ p} = 14 \text{ p})$
(a) Beräkna vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ på vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
(b) Formulera i ord de tre elementära radoperationer som används vid Gauss-elimination.
(c) Lös ekvationen $e^x - e^{-x} = 6$.
(d) Bestäm a och b sådana att punkten $(1, 3)$ är en inflexionspunkt på kurvan $y = ax^3 + bx^2$.
(e) Bestäm samtliga komplexa tal z som uppfyller att $\bar{z} = -z$ och $|z| = 3$.
(f) Skriv ned linjäriseringen $L(x)$ för $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ kring $x = 1$.
(g) Ange hur graferna till bägge leden i ekvationen $x = g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ plottas på intervallet $[1, 2]$ i samma figur med hjälp av Matlab. (Skriv ned alla kommandon och filer som behövs.)

2. Visa att planet genom punkterna $A = (3, -1, 2)$, $B = (1, 0, -2)$ och $C = (0, -2, 1)$ är parallellt med planet $x - 2y - z = 4$, och beräkna avståndet mellan planen. (6 p)

3. Beräkna nedanstående gränsvärden utan att använda l'Hospitals regel:
(a) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$ (3 p)
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^2+2x}{x^2+\sin x}$ (3 p)

4. (a) Skriv ned definitionen av Lipschitz-kontinuitet och beräkna mha. denna (ej derivata) en Lipschitz-konstant för $f(x) = x^3$ på intervallet $[0, A]$, där $A > 0$ är en konstant. (3 p)
(b) En kub med volymen 1000 cm^3 ska tillverkas med toleransen ± 5 cm^3. Hur noggrannt måste kubens sida göras? För att få poäng krävs att uppgiften löses med Lipschitz-villkor. *Tips.* Utnyttja resultatet i (a) med lämpligt val av A. Välj dock gärna en något större Lipschitz-konstant än den optimala på det intervall du betraktar, för att förenkla räkningarna. (3 p)

5. Skriv en funktionsfil `dekasekt.m` som givet en funktion `f`, ett startintervall `[a,b]` och en tolerans `tol` (där $f(a)$ och $f(b)$ har olika tecken) implementerar *dekasektionsalgoritmen* för lösning av ekvationen $f(x) = 0$, där det aktuella intervallet i varje steg delas in i *tio* delintervall. Om $f(a)f(b) > 0$ skall ett varningsmeddelande skrivas ut och funktionen avbrytas. Algoritmen utformas därefter så att följande sker i varje steg (där vi avgör i vilket av de tio delintervallen roten ligger):

(i) $dx = (b - a)/10$

(ii) $xv = a, \quad xh = a + dx$

(iii) Om $f(xv)f(xh) > 0$: $\quad xv = xv + dx, \quad xh = xh + dx.$ Upprepa (iii).

(iv) $a = xv, \quad b = xh$

Tips. Utgå från och modifiera `bisekt.m` som du gjorde i datorövning 3. (6 p)

6. (a) Härled derivatan av $\arctan x$. (3 p)
(b) Funktionen $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, antar endast två värden. Visa detta och bestäm $V(f)$. (3 p)

7. Formulera Bolzanos sats. Ange de fyra huvudstegen i beviset. Redogör för beviset av ett av stegen (dock ej det första). (6 p)

Lycka till! /Niklas

TMV225 Inledande Matematik M

Lösningsförslag 2012-10-27

1.

(a) $\mathbf{u_v} = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \dfrac{1}{3}\mathbf{v} = \dfrac{1}{3}(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$

(b) **i)** multiplicera en rad med skalär $\neq 0$

ii) addera en multipel av en rad till en annan rad

iii) byta plats på två rader

(c) Sätt $t = e^x$. Ekvationen blir $t - \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \pm \sqrt{10}$. Eftersom $t = e^x > 0$ fås $t = e^x = 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \ln t = \ln(3+\sqrt{10})$.

(d) Sätt in $(x, y) = (1, 3)$ i kurvans ekvation $y = ax^3 + bx^2$ så fås $a + b = 3$, vilket måste vara uppfyllt för att $(1, 3)$ skall vara en punkt på kurvan. Derivera: $y' = 3ax^2 + 2bx$, $y'' = 6ax + 2b$. Om $(x, y) = (1, 3)$ är en inflexionspunkt så är $y''(1) = 6a + 2b = 0$. Notera att y'' är ett förstagradsuttryck så y'' har olika tecken till vänster och höger om ett nollställe. De två ekvationerna

$$\begin{cases} a+b &= 3 \\ 6a+2b &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a &= -3/2 \\ b &= 9/2 \end{cases}$$

är därmed både nödvändiga och tillräckliga villkor för att $(x, y) = (1, 3)$ är en inflexionspunkt på kurvan.

(e) Sätt $z = a + bi$. Då blir $\bar{z} = a - bi$ och $-z = -a - bi$, så $\bar{z} = -z \Leftrightarrow a = 0$. Alltså är $z = bi$. Villkoret $|z| = 3$ ger att $b = \pm 3$. Svar: $z = \pm 3i$

(f) Sätt $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Derivera: $f'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$. Därmed blir $L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 - (x-1) = 1 - x$.

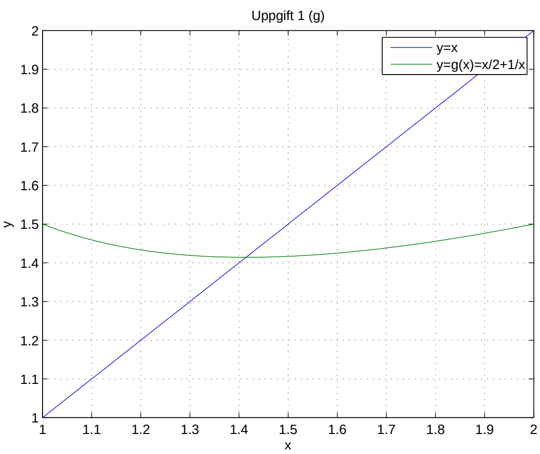
(g)

Funktionsfilen `g.m`

```
function y = g(x)
y = x/2 + 1./x;
```

Därefter ges kommandona:

```
>> x = linspace(1,2);
>> y1 = x;
>> y2 = g(x);
>> plot(x,y1,x,y2)
>> legend('y=x','y=g(x)=x/2+1/x')
>> xlabel('x'), ylabel('y')
>> grid on
>> title('Uppgift 1 (g)')
```



2. Kalla planet genom punkterna $A = (3, -1, 2)$, $B = (1, 0, -2)$ och $C = (0, -2, 1)$ för π_1, och planet med ekvationen $x - 2y - z = 4$ för π_2. En normalvektor $\mathbf{n}_1$ till π_1 fås med vektorprodukt:

$$\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = -5(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

En normalvektor $\mathbf{n}_2$ till π_2 fås direkt ur planets ekvation: $\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Eftersom $\mathbf{n}_1 = -5\mathbf{n}_2$ är planen parallella. För att beräkna avståndet d mellan planen beräknar vi avståndet från A till π_2. Vi väljer en godtycklig punkt $P = (4, 0, 0)$ som ligger i π_2 och använder skalär projektion:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_2|} = \frac{|(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

3.

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3}{2}$$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+2x}{x^2+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5x+2)}{x\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x+2}{x+\frac{\sin x}{x}}=\frac{0+2}{0+1}=2$

4. (a) *Definition.* (Lipschitz-kontinuerlig funktion.) Funktionen f är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I med Lipschitz-konstanten L om

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|\quad \forall x_1,x_2\in I.$$

Med $f(x)=x^3$ och $x_1,x_2\in[0,A]$ fås:

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|x_1^3-x_2^3|=|(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)|=(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)|x_1-x_2|\\&\le(A^2+A^2+A^2)|x_1-x_2|=3A^2|x_1-x_2|\end{aligned}$$

så vi kan välja $L=3A^2$.
(b) $V(x)=x^3$. Nominella värden: $x=10$ cm och $V=1000$ cm^3. Tolerans i V: 5 cm^3. Vi väljer intervallet $[0,A]=[0,11]$ (som innehåller $x=10$) och får från (a) Lipschitz-konstanten:

$$L=3A^2=3\cdot 11^2=363$$

För att få enklare räkningar väljer vi den något större Lipschitz-konstanten $L=400$, vilket ger:

$$\begin{aligned}&|V(x)-V(10)|\le L|x-10|\le 400|x-10|\le 5 \qquad \text{om}\\&|x-10|\le\frac{5}{400}=0.0125\end{aligned}$$

svar: $x=10\pm 0.0125$ cm.

5. Se nästa sida.

6. (a) Se Adams.
(b) Beräkna derivatan:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0,\quad x\neq 0$$

Detta innebär att $f(x)$ är konstant på intervallen $(-\infty,0)$ och $(0,\infty)$. Vi väljer en punkt i respektive intervall för att beräkna funktionsvärdet på intervallet:

$$\begin{aligned}f(1)&=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\\f(-1)&=\arctan(-1)+\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Alltså: $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & x<0\\ \frac{\pi}{2}, & x>0\end{cases}$

svar: $V(f)=\left\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right\}$

7. Se BM.

5. Funktionsfilen `dekasekt.m`

```
function x = dekasekt(f, int, tol)
% dekasekt - dekasektionsalgoritmen för ekvationen f(x) = 0
%
%   Inargument:
%           f - funktionshandtag till en funktionsfil
%           int - 1x2-matris som specificerar ett intervall int = [a,b]
%           tol - en tolerans
%   Utargument:
%           x - en approximativ lösning i intervallet int = [a,b]
%   Beskrivning:
%           Programmet dekasekt använder dekasektionsalgoritmen för att
%           beräkna en approximativ lösning till ekvationen f(x)=0
%           i intervallet int = [a,b].  Funktionsfilen som f pekar
%           på måste innehålla funktionen y = f(x). Funktionsvärdena
%           f(a) och f(b) måste ha olika tecken.  Programmet beräknar
%           en approximativ lösning x med ett fel |x-x_exakt| < tol.
%           Programmet returnerar en tom matris x = [] som utargument
%           om f(a) och f(b) har samma tecken.
%
%---------------------------------------------------------------------

a=int(1);                  % startintervallets vänstra ändpunkt
b=int(2);                  % startintervallets högra ändpunkt

% Visa ett felmeddelande, avbryt och returnera x = [] om f(a) och f(b)
% har samma tecken.

if f(a)*f(b)>0
    disp('Dekasektionsalgoritmen misslyckades: f(a), f(b) har samma tecken.')
    x=[];
    return
end

while b-a>tol          % fortsätt så länge som aktuellt intervall är längre
                       % än angiven tolerans

  dx = (b-a)/10;       % längd på de tio delintervallen
  xv = a;              % vänster ändpunkt på första delintervallet
  xh = a + dx;         % höger ändpunkt på första delintervallet

  while f(xv)*f(xh)>0  % ej teckenbyte på aktuellt delintervall
      xv = xv + dx;    % flytta till nästa delintervall
      xh = xh + dx;
  end

  a = xv;  % välj a och b som ändpunkter på delintervall med teckenbyte
  b = xh;
end

x=(a+b)/2;                % beräkna mittpunkten x på sista intervallet
                          % detta x returneras
```