**MATEMATIK** | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2013-01-19 kl. 8.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Magnus Önnheim
Telefon: 0703 088 304

# TMV225 Inledande Matematik M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

**1.** Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. $(7 \times 2 \text{ p} = 14 \text{ p})$
(a) Lös olikheten $x^3 > 4x$.
(b) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar den skalära projektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$.
(c) Skriv det komplexa talet $\frac{1+3i}{2-i}$ på rektangulär form.
(d) Låt $f(x) = x^3 + x - 9$. Beräkna $(f^{-1})'(1)$.
(e) Beräkna (den minsta möjliga) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ på intervallet $I = [1, 2]$.
(f) Beräkna $\tan(\cos^{-1}(-0.6))$.
(g) Redogör för definitionen av Cauchy-följd, både i ord och formellt med $\epsilon$ och $N$.

**2.** Bestäm kortaste avståndet från punkten $P = (1, -1, 0)$ till planet genom punkterna $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 2, 1)$ och $C = (3, 2, -1)$. (6 p)

**3.** Använd Gauss eliminationsmetod för att lösa (6 p)

$$\begin{cases} x - 3z = 8 \\ 2x + 2y + 9z = 7 \\ y + 5z = -2 \end{cases}$$

**4.** Bestäm, om möjligt, konstanterna $a$ och $b$ sådana att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig. (6 p)

**5.** Skissa grafen till funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$. Ange eventuella extremvärden, inflexionspunkter och konkavitet. (6 p)

**6.** (a) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering. (3 p)
(b) Skriv den funktionsfil `newton.m` som du gjorde i datorövning 6, det vill säga givet en funktion `f`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementeras Newtons metod på dessa data. Du kan anta att funktionsfilen `derivata.m`, för beräkning av numerisk derivata, från datorövning 5 är given. (3 p)

**7.** (a) Formulera medelvärdessatsen. (3 p)
(b) Visa att om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$ så är $f$ strängt växande på intervallet $I$. (3 p)

*Lycka till!* /Niklas

**TMV225 Inledande Matematik M**

Lösningsförslag 2013-01-19

**1.**

(a) $x^3 > 4x \Leftrightarrow x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x^2-4) > 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) > 0$

| $x$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x(x-2)(x+2)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

svar: $-2 < x < 0$ eller $x > 2$ (med intervall: $(-2,0) \cup (2,\infty)$)

(b) Funktionsfilen `sprojektion.m`

```
function s=sprojektion(u,v)
% Skalära projektionen av en vektor u på en vektor v.
%
% Syntax:       s=sprojektion(u,v)
%
% Inargument:   u,v - två 1x3-vektorer
% Utargument:   s   - en skalär

vhat=v/norm(v);   % normera vektorn v
s=dot(u,vhat);
```

(c) Förläng med nämnarens konjugat:

$$\frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+6i-3}{4+1} = \frac{-1+7i}{5}$$

svar: $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

(d) Notera att $f(2) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 2$. Därmed fås:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{13}$$

svar: $\frac{1}{13}$

(e) Vi får med konjugatregeln:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left|\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right| = \left|\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}|x_1 - x_2| \le \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [1,2].$$

svar: $L = \frac{1}{2}$

(f) Låt $v$ vara vinkeln i första kvadranten ($0 < v < \frac{\pi}{2}$) sådan att $\cos v = 0.6$. Då blir $\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v} = 0.8$. Därmed fås:

$$\tan(\cos^{-1}(-0.6)) = \tan(\pi - \cos^{-1}(0.6)) = \tan(\pi - v) = -\tan v = -\frac{0.8}{0.6} = -\frac{4}{3}$$

svar: $-\frac{4}{3}$

(g) En talföljd $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ kallas Cauchy-följd om $\forall\epsilon > 0\ \exists N$ sådant att

$$i, j \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_i - a_j| < \epsilon.$$

Detta innebär att avståndet mellan tal i följden blir hur litet som helst bara deras index väljs tillräckligt stora. Talen i följden "närmar sig varandra".

**2.** En normalvektor $\mathbf{n}$ till planet fås med vektorprodukt:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Avståndet från $P$ till planet blir (vi väljer punkten $A$ i planet):

$$\left|\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| = \left|\frac{-2\mathbf{j} \cdot (-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})}{\sqrt{14}}\right| = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

svar: $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$

**3.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

svar: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

**4.**

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 3 \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^+} (x+1)(\sqrt{x}+1) = 4$$

Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig om och endast om:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 3 \\ a \cdot 1 + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

svar: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

**5.**

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$
$$f'(x) = e^{-x^2/2} + x(-x)e^{-x^2/2} = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$$
$$f''(x) = -2xe^{-x^2/2} + (1 - x^2)(-x)e^{-x^2/2} = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}$$

Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Nollställen till andraderivatan: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{3}$

Teckentabell:

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x) = x(x^2-3)e^{-x^2/2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x) = xe^{-x^2/2}$ | $\searrow$ $\cap$ | infl | $\searrow$ $\cup$ | min | $\nearrow$ $\cup$ | infl | $\nearrow$ $\cap$ | max | $\searrow$ $\cap$ | infl | $\searrow$ $\cup$ |

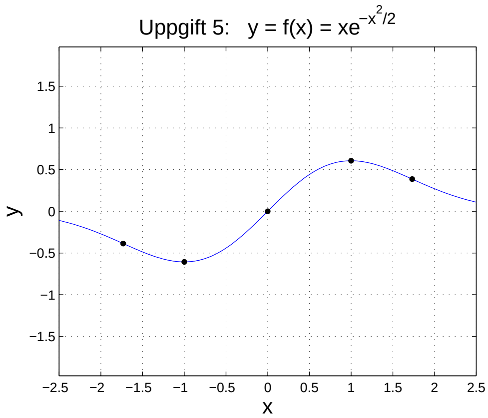
Notera att $f$ är udda och att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

svar:

Lokalt min: $-e^{-1/2}$ i $x = -1$
Lokalt max: $e^{-1/2}$ i $x = 1$

Inflexionspunkter: $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-3/2})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-3/2})$

Konkav på: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
Konvex på: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$




**6.** (a) Se Adams eller BM.
(b) Funktionsfilen `newton.m`

```
function x = newton(f,x0,tol)
% Newtons metod för den skalära ekvationen f(x)=0
%
%   Syntax:
%           x = newton(f,x0,tol)
%   Inargument:
%           f - funktionshandtag till en funktionsfil
%               som returnerar ett reellt tal y=f(x)
%           x0 - ett reellt tal, startapproximation
%           tol - ett positivt reellt tal, en tolerans
%   Utargument:
%           x - ett reellt tal, en approximativ lösning
%   Beskrivning:
%           Programmet newton använder Newtons metod för att beräkna en
%           approximativ lösning till den skalära ekvationen f(x)=0.
%           Funktionsfilen som f pekar på måste returnera ett tal y=f(x).
%           Derivatan f'(x) beräknas numeriskt med funktionen derivata.
%           Om startapproximationen x0 ligger tillräckligt nära en rot
%           x_exakt, beräknar programmet en approximativ lösning x
%           med felet |x-x_exakt| < tol.
%   Exempel:
%          x = newton(@sin, 3, 1e-7) beräknar pi med 7 decimaler
%
%          Om m-filen funk1.m innehåller
%            function y = funk1(x)
%            y=x.^2-2;
%
%          kommer kommandot
%            >> x = newton(@funk1, 3, 1e-7)
%          att beräkna roten ur 2.
%-----------------------------------------------------------------------
```

```
x = x0;                          % startapproximation
h = tol + 1;                     % för att komma in i while-loopen
                                 %   första gången

while abs(h)>tol
   a = derivata(f,x);            % beräkna derivatan a=f'(x)
   b = -f(x);                    % beräkna residualen b=-f(x)
   h = b/a;                      % beräkna steget (ändringen)
   x = x + h;                    % uppdatera
end
```

**7.** Se Adams.