MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Datum: 2013-08-28 kl. 8.30–12.30

Telefonvakt: Anders Martinsson

Telefon: 0703 088 304

TMV225 Inledande Matematik M

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar. (7×2 p $= 14$ p)

(a) Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\mathbf{a} = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ och $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(b) Bestäm konstanten k s.a. det linjära ekvationssystemet $\begin{cases} x - 2y &= -1 \\ -x + ky &= \;\;\,3 \end{cases}$ saknar lösning.

(c) Bestäm principalargumentet $\operatorname{Arg} z$ till det komplexa talet $z = \sqrt{3} - i$. Svara i radianer.

(d) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

(e) Låt $f(x) = e^x + x - 1$. Beräkna $(f^{-1})'(e)$.

(f) Beräkna en approximation till $\sqrt[4]{15}$ genom att linjärisera kring lämpligt vald punkt. Svara på bråkform.

(g) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar vektorprojektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$.

2. Bestäm spegelbilden av punkten $P = (5, 5, -3)$ i planet genom punkterna $A = (-1, 7, 1)$, $B = (0, 5, 1)$ och $C = (1, 1, 0)$. (6 p)

3. (a) Skriv den funktion `fixpunkt.m` som du gjorde i datorövning 4, d.v.s. givet en funktion `g`, en startpunkt `x0` och en tolerans `tol` implementeras fixpunktsiteration på dessa data. (3 p)

(b) Visa att förutsättningarna i fixpunktssatsen (kontraktionsavbildningssatsen) är uppfyllda för fixpunktsekvationen $x = \frac{x^2}{5} + 1$ på intervallet $[1, 2]$. (2 p)

(c) Beskriv hur `fixpunkt.m` anropas från kommandoraden för att beräkna lösningen (fixpunkten) till ekvationen i deluppgift (b). Skriv också ned den funktionsfil som behövs för att beskriva fixpunktsekvationen. (1 p)

4. Skissa grafen och bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. Ange eventuella extremvärden, inflexionspunkter och konkavitet. (6 p)

5. Vi vill tillverka en behållare med den totala volymen 45π dm^3 som är utformad som en cylinder med en halvsfär ovanpå. Bestäm behållarens dimensioner så att dess totala begränsningsyta blir så liten som möjligt. (6 p)

6. (a) Skriv ned definitionen av att f är en Lipschitz-funktion på ett intervall I. (2 p)

(b) Bevisa att summan av två Lipschitz-funktioner (på ett intervall I) är Lipschitz på I. (4 p)

7. (a) Bevisa att: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (3 p)

(b) Härled derivatan av $\sin x$. (3 p)

Du får utnyttja resultatet i (a) samt (utan bevis) standardgränsvärdet: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Lycka till! /Niklas

TMV225 Inledande Matematik M

Lösningsförslag 2013-08-28

1.

(a) $V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |2\mathbf{j} \cdot (-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})| = |-8| = 8$

(b) Eliminera x ur den andra ekvationen genom att addera ekvationerna:

$$\begin{cases} x - 2y &= -1 \\ -x + ky &= 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y &= -1 \\ (k-2)y &= 2 \end{cases}$$

Lösning saknas då $k = 2$.

(c) Per definition så är $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$. Eftersom $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}$ och $\operatorname{Im} z = -1$ så ligger z i den fjärde kvadranten, d.v.s. $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < 0$. Därmed gäller:

$$\begin{cases} \tan(\operatorname{Arg} z) = -1/\sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{6}$$

(d) Förläng med nämnarens konjugat:

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x\to 9} \sqrt{x}+3 = 6$$

(e) $f'(x) = e^x + 1 > 0$ så f är strängt växande och f^{-1} existerar. Eftersom $f(1) = e$ fås: $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{e+1}$

(f) Eftersom $\sqrt[4]{16} = 2$, linjäriserar vi kring $x = 16$. Sätt $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ så fås $f'(x) = \frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}$. Därmed blir $L(x) = f(16) + f'(16)(x-16) = 2 + \frac{1}{4}\,16^{-\frac{3}{4}}(x-16) = 2 + \frac{1}{32}\,(x-16)$, och vi får den linjära approximationen $\sqrt[4]{15} = f(15) \approx L(15) = 2 + \frac{1}{32}\,(15-16) = \frac{63}{32}$.

(g) Funktionsfilen `vprojektion.m`:

```
function w=vprojektion(u,v)
% Vektorprojektion av en vektor u på en vektor v.
%
% Syntax: w=vprojektion(u,v)
%
% Inargument:   u,v - två 1x3 vektorer
% Utargument:   w   - en vektor

vhat=v/sqrt(prick(v,v));    % normera vektorn v
w=prick(u,vhat)*vhat;

%  vhat=v/norm(v);          % alternativ med matlabs norm
%  w=dot(u,vhat)*vhat;      % och dot
```

2. En normalvektor $\mathbf{n}$ till planet fås med vektorprodukt:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

För att beräkna spegelbilden P' av P i planet, väljer vi en godtycklig punkt i planet (vi tar A), och beräknar vektorprojektionen $\overrightarrow{PA}_{\mathbf{n}}$ av $\overrightarrow{PA} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ på $\mathbf{n}$:

$$\overrightarrow{PA}_{\mathbf{n}} = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\,\mathbf{n} = \frac{-12+2-8}{9}\,(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Notera att $\overrightarrow{PA}_{\mathbf{n}}$ är en vektor vinkelrät mot planet som har sin fot i P och sin spets i planet. Därmed får vi (starta i P, följ vektorprojektionen $\overrightarrow{PA}_{\mathbf{n}}$ in i planet och sedan lika långt till):

$$P' = P + 2(-4,-2,4) = (-3,1,5)$$

3. (a) Funktionsfilen `fixpunkt.m`:

```
function x=fixpunkt(g,x0,tol)
% fixpunkt - fixpunktsiteration för den skalära ekvationen x=g(x)
%
%   Syntax:
%           x = fixpunkt(g,x0,tol)
%   Inargument:
%           g - funktionshandtag till en funktionsfil
%           x0 - ett tal, startapproximation
%           tol - en tolerans
%   Utargument:
%           x - ett tal, den approximativa lösningen
%   Beskrivning:
%          Programmet fixpunkt använder fixpunktsiteration för att
%          beräkna en approximativ lösning till den skalära ekvationen
%          x=g(x).  Funktionsfilen som g pekar på måste innehålla
%          funktionen y=g(x). Funktionen g:I->I måste vara en kontraktion
%          på något slutet intervall I.  Då har g en unik fixpunkt x_exakt
%          i I. Om startapproximationen x0 tillhör I, så beräknar
%          programmet en approximativ lösning x med felet
%          |x-x_exakt| < tol/(1-L), där L är Lipschitz-konstanten för g.
%   Exempel:
%          x = fixpunkt(@cos, 1, 1e-7) beräknar x= 0.739085169944554
%   Se också:
%          bisekt.m
%
%-----------------------------------------------------------------------
x1=x0;                 % x1 = aktuellt tal (startapproximationen) i följden.
x=g(x1);               % Beräkna nästa tal i följden.

while abs(x1-x)>tol    % Fortsätt så länge skillnaden > tol:
    x1=x;              %   Uppdatera aktuellt tal i följden.
    x=g(x1);           %   Beräkna nästa tal i följden.
end
```

(b)

- $I = [1,2]$ är ett slutet intervall.
- $g : I \to I$, eftersom:

$$1 \le x \le 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} + 1 \le \overbrace{\frac{x^2}{5} + 1}^{g(x)} \le \frac{4}{5} + 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \le g(x) \le 2$$

- g är en kontraktionsavbildning på I, eftersom:

$$L_g = \max_{x\in[1,2]} |g'(x)| = \max_{x\in[1,2]} |\frac{2x}{5}| = \frac{4}{5} < 1$$

(c) Kommandon:

```
>> x0 = 1.5;    % Godtycklig punkt i I = [1,2]
>> TOL = 1e-7; % Tolerans
>> x = fixpunkt(@g, x0, TOL)
```

Funktionsfilen `g.m`:

```
function y=g(x)
y = x^2/5 + 1;
```

4.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{e^x}{x+1} \\
f'(x) &= \frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{(e^x+xe^x)(x+1)^2 - xe^x 2(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x+1)^3 e^x - 2x(x+1)e^x}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x^2+2x+1-2x)e^x}{(x+1)^3} \\
&= \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}
\end{aligned}$$

Kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Nollställen till andraderivatan: $f''(x) = 0$ saknar lösning, eftersom täljaren är positiv för alla x.

OBS! Varken f, f' eller f'' är definierad i $x = -1$.

Teckentabell:

x		-1		0	
$f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$	$-$	odef.	$-$	0	$+$
$f''(x) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$	$-$	odef.	$+$	$+$	$+$
$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$	$\searrow$ $\cap$	odef.	$\searrow$ $\cup$	min	$\nearrow$ $\cup$

Gränsvärden: $f(x) \to \begin{cases} 0, & x \to -\infty \\ -\infty, & x \to -1^- \\ \infty, & x \to -1^+ \\ \infty, & x \to \infty \end{cases}$

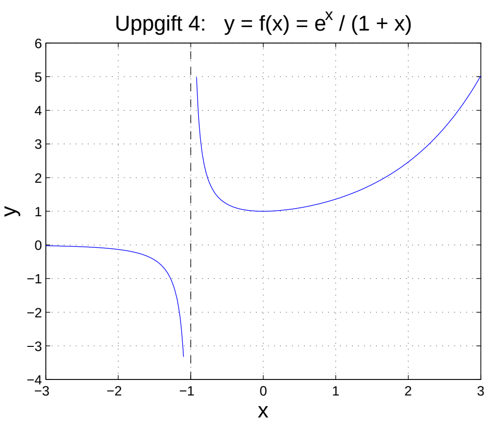
svar:

Lokalt min: 1 i $x = 0$

Inflexionspunkter: -
(Notera: Ingen inflexionspunkt i $x = -1$, eftersom f ej är definierad där.)

Konkav på: $(-\infty, -1)$
Konvex på: $(-1, \infty)$

Värdemängd: $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$



5. Kalla cylinderns höjd för h [dm] och halvsfärens och cylinderns gemensamma radie för r [dm]. Enligt den givna volymen för behållaren gäller sambandet:

$$\underbrace{\pi r^2 h}_{\text{cylindervolym}} + \underbrace{\frac{2\pi r^3}{3}}_{\text{volym av halvklot}} = 45\pi$$

$$h = \frac{45}{r^2} - \frac{2r}{3}$$

Den totala begränsningsytan blir därmed som funktion av r:

$$\begin{aligned} A(r) &= \underbrace{\pi r^2}_{\text{cylinderbotten}} + \underbrace{2\pi r h(r)}_{\text{mantelyta}} + \underbrace{2\pi r^2}_{\text{halvsfär}} \\ &= \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{45}{r^2} - \frac{2r}{3}\right) + 2\pi r^2 \\ &= \frac{5\pi}{3} r^2 + \frac{90\pi}{r} \end{aligned}$$

Vi deriverar:

$$A'(r) = \frac{10\pi}{3} r - \frac{90\pi}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{3} r = \frac{90}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad r = 3$$

Notera att $A'(r) < 0$ för $r < 3$ och $A'(r) > 0$ för $r > 3$, så $r = 3$ ger ett minimum. Motsvarande värde på h är $h = \frac{45}{9} - \frac{6}{3} = 3$.

6. Se BM.

7. Se Adams.