MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Cornelia Jareteg, tel. 0703–088304

TMV225 2013
2013–10–25 kl. 08.30–12.30 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $|3x - 2| < 5x$. (3p)

2. Bestäm största värdet för funktionen $f(x) = x(1-x)$ på intervallet $[-1, 1]$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \ln(x^\pi)$ på intervallet $[4, 8]$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar tredje ordningens Maclaurin-polynom för funktionen $\sin x$. (3p)

5. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. (3p)

6. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x) = x + 2\sin x$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{(2x+3x^2)(2x-3x^2)}$. (3p)

8. Bestäm lineariseringen av $f(x) = x \tan x$ runt $x = \pi$. (3p)

9. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = 1/(1-x^3)$. (3p)

10. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n^2} \left(\frac{3x+1}{5}\right)^n$. (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x = \cos x$ med Newtons metod med cirka 10 decimalers noggrannhet. Programmet skall använda numerisk derivata. (5p)

Välj själv om derivatan skall beräknas genom att anropa en separat funktion eller om den skall beräknas direkt i scriptet. Om du väljer att anropa en separat funktion måste den funktionen också ges!

12. Formulera Banachs fixpunktssats. (1p) (5p)

Beskriv de olika stegen i beviset av Banachs fixpunktssats (1p) och genomför beviset (3p).

Formulera (men bevisa ej) eventuella lemman!

13. Visa att om $\lim_{i\to\infty} x_i = \bar{x}$ så är $\{x_i\}$ en Cauchy-följd. (5p)

14. För en funktion f med Lipschitz-konstant L_f kan man definiera den så kallade *interpolanten* $\pi_h f$ av f på intervallet $[a, b]$ som (5p)

$$\pi_h f(x) = f(a)\lambda_a(x) + f(b)\lambda_b(x),$$

där $\lambda_a(x) = \frac{b-x}{b-a}$ och $\lambda_b(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

(a) Visa att $f(x) = f(x) \cdot (\lambda_a(x) + \lambda_b(x))$. (1p)

(b) Visa feluppskattningen $|f(x) - \pi_h f(x)| \leq 2(b-a)L_f$ för $x \in [a, b]$. (2p)

(c) Visa den skarpare feluppskattningen $|f(x) - \pi_h f(x)| \leq \frac{b-a}{2} L_f$ för $x \in [a, b]$. (2p)

Om du visar (c) ges full poäng utan att (b) behöver visas separat!

MATEMATISKA VETENSKAPER | **TMV225 2013**
Chalmers tekniska högskola | **2013–10–25 kl. 08.30–12.30 (V)**
Examinator: Anders Logg | **Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Telefonvakt: Cornelia Jareteg, tel. 0703–088304

TMV225 Inledande matematik M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

1. $|3x-2| < 5x$

Fall 1: $3x-2 \geq 0 \iff x \geq 2/3$

$3x-2 < 5x$

$-2 < 2x$

$-1 < x$

$\therefore \quad x \geq 2/3$

Fall 2: $3x-2 < 0 \iff x < 2/3$

$-(3x-2) < 5x$

$2 < 8x$

$x > 1/4$

$\therefore \quad 1/4 < x < 2/3$

Svar: $\underline{\underline{x > 1/4}}$

---

2. $f(x) = x(1-x) = x - x^2$

Kritisk punkt: $0 = f'(x) = 1 - 2x \iff x = 1/2 \in [-1,1]$

$f(1/2) = 1/4$ ($\underline{\text{max}}$ ty $f'' < 0$)

(Ändpunkter: $f(-1) = -2 \quad f(1) = 0$)

Svar: $\underline{\underline{1/4}}$

---

3. $f(x) = \ln x^{\pi} = \pi \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\pi}{x}$

$\Rightarrow L_f = \max_{[4,8]} |f'| = \dfrac{\pi}{4}$

Svar: $\underline{\underline{\pi/4}}$

4. function y = funk(x)

y = x - x^3/6;

---

5. $y = \dfrac{1+x}{1-x}, \quad x \neq 1$

$y - xy = 1 + x$

$xy + x = y - 1$

$x(1+y) = y - 1$

$x = \dfrac{y-1}{y+1}$

Svar: $\underline{\underline{f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}}}$

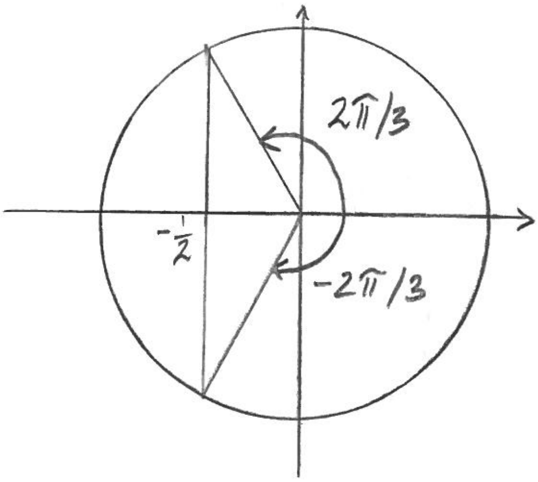
---

6. $f(x) = x + 2\sin x$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$

$f'(x) = 0 \iff 1 + 2\cos x = 0 \iff \cos x = -1/2$

$\iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$



Svar: $\underline{\underline{x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}}}$

---

7. l'Hôpital ger

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\underbrace{(2x+3x^2)(2x-3x^2)}_{= 4x^2 - 9x^4}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{8x - 36x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{8 - 108x^2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Svar: $\underline{\underline{1/4}}$

③

8. $f(x) = x\tan x$ $\qquad f(\pi) = \pi \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$ $\qquad f'(\pi) = 0 + \frac{\pi}{(-1)^2} = \pi$

$\Rightarrow Lf(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) = 0 + \pi(x-\pi) = \pi x - \pi^2$

Svar: $\underline{\underline{\pi x - \pi^2}}$

---

9. Geometrisk serie: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,\ x \in (-1,1)$

$\Rightarrow \frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$

Svar: $\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}}}$

---

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n^2}\left(\frac{3x+1}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3^n}{2n^2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}_{a_n}\left(x+\frac{1}{3}\right)^n$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{3^{n+1}}{2(n+1)^2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{\cancel{3^n}}{\cancel{2}n^2}\cdot\cancel{\left(\frac{3}{5}\right)^n}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot 3\cdot\frac{3}{5} \to \frac{9}{5} = L$

då $n \to \infty$

$\Rightarrow R = 1/L = 5/9$

Svar: $\underline{\underline{R = 5/9}}$

11.

```
x = 1;            % initial guess
tol = 1e-10;      % tolerance
dx = 2*tol;       % start with |dx| > tol
h = sqrt(eps);    % increment for difference quotient

while abs(dx) > tol

    f = x - cos(x);

    df = (x+h - cos(x+h) - (x - cos(x))) / h;

    dx = - f / df;

end
```

---

12. Se föreläsningsanteckningar!

---

13. Betrakta skillnaden $|x_i - x_j|$:

$$
\begin{aligned}
|x_i - x_j| &= |x_i - \bar{x} + \bar{x} - x_j| \\
&\leq |x_i - \bar{x}| + |\bar{x} - x_j| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

om vi tar $i, j > N$ valt så att

$$|x_i - \bar{x}| < \varepsilon/2 \quad \forall\, i \geq N.$$

Detta är möjligt ty $x_i \to \bar{x}$.

$$\therefore \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : i, j \geq N \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Cauchy-följd.

$\blacksquare$

14. a)

$$\lambda_a(x) + \lambda_b(x) = \frac{b-x}{b-a} + \frac{x-a}{b-a}$$

$$= \frac{b-\cancel{x}+\cancel{x}-a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\cdot(\lambda_a(x)+\lambda_b(x))$$

b)

$$|f(x) - \pi_h f(x)| = |f(x)\cdot(\lambda_a(x)+\lambda_b(x)) - (f(a)\lambda_a(x) + f(b)\lambda_b(x))|$$

$$= |(f(x)-f(a))\cdot\lambda_a(x) + (f(x)-f(b))\cdot\lambda_b(x)|$$

$$\leq |f(x)-f(a)||\lambda_a(x)| + |f(x)-f(b)|\cdot|\lambda_b(x)|$$

$$\leq L_f\cdot\underbrace{|x-a|}_{\leq(b-a)}\cdot\underbrace{|\lambda_a(x)|}_{\leq 1} + L_f\cdot\underbrace{|x-b|}_{\leq(b-a)}\cdot\underbrace{|\lambda_b(x)|}_{\leq 1} \quad (*)$$

$$\leq L_f\cdot(b-a) + L_f\cdot(b-a) = \underline{\underline{2L_f(b-a)}}$$

c) Vi fortsätter från (*):

$$|f(x)-\pi_h f(x)| \leq L_f\cdot|x-a|\cdot|\lambda_a(x)| + L_f\cdot|x-b|\cdot|\lambda_b(x)|$$

$$= L_f(x-a)\lambda_a(x) + L_f(x-b)\lambda_b(x)$$

$$= L_f\frac{(x-a)(b-x)}{b-a} + L_f\frac{(x-b)(x-a)}{b-a}$$

$$= 2L_f\frac{(x-a)(b-x)}{b-a} \leq \left\{\begin{array}{l}\text{Maximum antas i}\\ \text{mittpunkten (se uppg. 2)}\end{array}\right\}$$

$$\leq 2L_f\frac{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a} = 2L_f\frac{\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2}}{b-a}$$

$$= \underline{\underline{\frac{b-a}{2}L_f}}$$

■