MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, tel. 0703–088304

TMV225 2014
2014–10–31 kl. 14.00–18.00 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, tel. 0703–088304

TMV225 2014
2014–10–31 kl. 14.00–18.00 (V)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $4x^2 - 9 > 0$. (3p)

2. Bestäm största värdet för funktionen $f(x) = \pi x + 2\sin(\pi x)$ på intervallet $[0, 3^1\!/\!_3]$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \ln(1/x)$ på intervallet $[\epsilon, 1]$ för $0 < \epsilon < 1$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar 3:e ordningens Maclaurin-polynom för $f(x) = \ln(1 + x)$. (3p)

5. Bestäm värdet av $\tan^{-1}(\sin(\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)) + 0.5)$. (3p)

6. Bestäm värdemängd för funktionen $f(x) = \ln(\sin(\pi + \exp(3/x)))$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{2x})^x$. *Ledning: logaritmera!* (3p)

8. Bestäm lineariseringen av $f(x) = \exp(\sin(\pi x))$ runt punkten $\bar{x} = 3/2$. (3p)

9. Bestäm a så att $(f^{-1})'(y) = 11/4$ i punkten $y = f(2)$ då $f(x) = \ln(x^2 + a^2)$. (3p)

10. Bestäm konvergensradien för serien $1 + \frac{3}{4}x + x^2 + \frac{27}{16}x^3 + \frac{81}{25}x^4 \ldots$ (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^2 = 2$ med bisektionsmetoden med ca 10 decimalers noggrannhet. (5p)

Var noggrann med att välja bra startpunkter!

12. Formulera satsen om Lipschitz-kontinuitet för en produkt. (1p) (5p)

Genomför beviset (4p).

13. Visa att $\{z_i = x_i y_i\}$ är en Cauchy-följd om $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är Cauchy-följder. (5p)

14. Betrakta följande program: (5p)

```
tol = 1e-10; dx = 2*tol; x = 1;

while abs(dx) > tol
  dx = 8*sin(pi/4) - log(x^4);
  x = x + dx;
end
```

(a) Vilken ekvation löser programmet? (1p)

(b) Bestäm lösningen. (1p)

(c) Efter (ca) hur många iterationer har lösningen konvergerat? (3p)

Ledning: Du får utnyttja att $x_k > 4.1$ för $k \geq 1$.

MATEMATISKA VETENSKAPER — **TMV225 2014**
Chalmers tekniska högskola — **2014–10–31 kl. 14.00–18.00 (V)**
Examinator: Anders Logg — **Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, tel. 0703–088304

TMV225 Inledande matematik M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TMV 225 Tenta 2014-10-31

1.

$$4x^2 - 9 > 0$$

$$(2x+3)(2x-3) > 0$$

Fall 1

$$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2x-3 > 0$$

$$x > 3/2$$

Fall 2

$$\begin{cases} 2x+3 < 0 \\ 2x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2x < -3$$

$$x < -3/2$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{x < -3/2 \text{ eller } x > 3/2}}$

2.

$$f(x) = \pi x + 2 \sin \pi x$$

$$f'(x) = \pi + 2\pi \cos \pi x = \pi \cdot (1 + 2 \cos \pi x)$$

Bestäm kritiska punkter: $f'(x) = 0$

$$1 + 2\cos \pi x = 0$$

$$\cos \pi x = -1/2$$

$$\pi x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$$

$$x = \pm 2/3 + 2n$$

Bestäm $f''(x)$ i kritiska punkter:

$$f''(x) = -2\pi^2 \sin(\pi x)$$

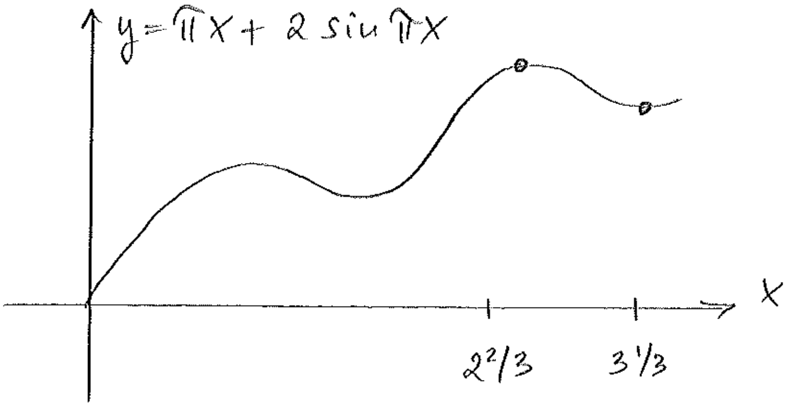
$f''(x) < 0$ för $x = 2/3 + 2n$ (maxpunkter)

$f''(x) > 0$ för $x = -2/3 + 2n$ (minpunkter)

Maximum (globalt) antas i punkten

$$x = 2/3 + 2 = 2\,2/3,$$

ty höger ändpunkt $x = -2/3 + 4 = 3\,1/3$ är en minimipunkt.



$\Rightarrow$ Maximum är

$$f\left(2\tfrac{2}{3}\right) = \pi \cdot 2\tfrac{2}{3} + 2\sin\left(\pi \cdot 2\tfrac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}$$

Uppgift 3: Se längre ned...

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}}}$

4.

```
function y = myfunction(x)
y = x - x^2/2 + x^3/3;
```

5.

$$\tan^{-1}\left(\sin\left(\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)\right) + 0.5\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\sin(\pi/6) + 0.5\right) = \tan^{-1}\left(\tfrac{1}{2} + 0.5\right)$$

$$= \tan^{-1}(1) = \pi/4$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\pi/4}}$

6.

$$f(x) = \ln\big(\sin(\pi + \exp(\underbrace{3/x}_{(-\infty,0)\cup(0,\infty)}))\big)$$

$$\underbrace{\exp(3/x)}_{(0,1)\cup(1,\infty)}$$

$$\underbrace{\pi + \exp(3/x)}_{(\pi,\,1+\pi)\cup(1+\pi,\,\infty)}$$

$$\underbrace{\sin(\pi + \exp(3/x))}_{[-1,1]\ \cap\ (0,\infty) = (0,1]}$$

$$\underbrace{\ln(\sin(\pi + \exp(3/x)))}_{(-\infty,\,0]}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{(-\infty, 0]}}$

7.

$$\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x\right)$$

$$= \exp\left(x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\cdot 2x \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right) = \{y = 1/2x\}$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+y)}{y}\right) \xrightarrow{y\to 0} \exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{1+y}}{1}\right)_{y\to 0}$$

(l'Hôpital)

$$= \exp\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right) = \underline{\underline{\sqrt{e}}}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\sqrt{e}}}$

8.

$$f(x) = \exp(\sin(\pi x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \exp(\sin(\pi x)) \cdot \pi \cos(\pi x)$$

$$f(\bar{x}) = \exp\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{1}{e} \cdot \pi \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) = f(\bar{x}) = \frac{1}{e}.$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{1/e}}$

9.

$$f(x) = \ln(x^2 + a^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 + a^2}$$

$$\frac{11}{4} = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{2^2 + a^2}{2 \cdot 2} = \frac{4 + a^2}{4}$$

$$11 = 4 + a^2 \iff a^2 = 7$$

$$\iff a = \pm\sqrt{7}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{a = \pm\sqrt{7}}}$

3.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow L_f = \max_{[\varepsilon,1]} |f'| = \max_{[\varepsilon,1]} \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{\varepsilon}$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{1/\varepsilon}}$

10.

$$1 + \frac{3}{4}x + x^2 + \frac{27}{16}x^3 + \frac{81}{25}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{3^1}{2^2}x + \frac{3^2}{3^2}x^2 + \frac{3^3}{4^2}x^3 + \frac{3^4}{5^2}x^4 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^2} x^n$$

$$a_n = \frac{3^n}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)^2}{(n+1+1)^2\cdot 3^n} = 3\cdot\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \longrightarrow 3 \text{ då } n\to\infty$$

$$\Rightarrow R = 1/3$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{R = 1/3}}$

11.

```
a=1;
b=2;

tol= 1e-10;

fa = a*a-2;
fb= b*b-2;

while b-a > tol

   c = (a+b)/2;
   fc = c*c-2;

   if fa*fc <0
      b=c;
      fb=fc;
   elseif fb*fc <0
      a=c;
      fa=fc;
   else
      break
   end
end

X = c
```

12. Se föreläsningsanteckningar!

13.

$$|z_i - z_j| = |x_i y_i - x_j y_j|$$
$$= |x_i y_i - x_i y_j + x_i y_j - x_j y_j|$$
$$\leq |x_i||y_i - y_j| + |x_i - x_j|\cdot|y_j|$$

Notera att $\{x_i\}$ Cauchy $\Rightarrow \exists \bar{x} : x_i \to \bar{x}$.

$$\Rightarrow \quad |x_i| = |x_i - \bar{x} + \bar{x}| \leq |\bar{x}| + |x_i - \bar{x}|$$
$$\leq |\bar{x}| + 1 \quad \text{(om } i \text{ tillräckligt stort)}$$

Samma argument för $\{y_i\}$ ger $|y_i| \leq |\bar{y}| + 1$

$$\Rightarrow \quad |z_i - z_j| \leq (1 + |\bar{x}|)\cdot|y_i - y_j| + |x_i - x_j|\cdot(1 + |\bar{y}|)$$
$$< \cancel{(1+|\bar{x}|)}\cdot\frac{\varepsilon/2}{\cancel{1+|\bar{x}|}} + \cancel{(1+|\bar{y}|)}\cdot\frac{\varepsilon/2}{\cancel{1+|\bar{y}|}}$$
$$= \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

om $i, j \geq N$ s.a.

$$\begin{cases} |x_i - x_j| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\bar{x}|} \\ |y_i - y_j| < \dfrac{\varepsilon/2}{1+|\bar{y}|} \\ |x_i - \bar{x}| < 1 \\ |y_i - \bar{y}| < 1 \end{cases}$$

$\blacksquare$

14. a)

När programmet "konvergerat":

$$dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8\sin(\pi/4) - \ln x^4 = 0$$

$$\overset{2}{\cancel{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \overset{1}{\cancel{4}} \ln x = 0$$

$$\sqrt{2} - \ln x = 0$$

$$\underline{\underline{\ln x = \sqrt{2}}}$$

b)

$$\ln x = \sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{x = e^{\sqrt{2}}}}$$

c) Fixpunktsiteration med

$$g(x) = x + dx(x)$$

$$= x + 8\sin(\pi/4) - \ln x^4$$

$$= x + 8\sin(\pi/4) - 4\ln x$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = 1 - 4/x$$

$$L_g = \max|g'(x)| = \{\text{Enligt ledning}\}$$

$$= |1 - 4/4.1| = \frac{4.1-4}{4.1} = \frac{0.1}{4.1} = \frac{1}{41}$$

Vi vet att $|e_k| \leq L_g^k \cdot |e_0| \sim L_g^k$

$(e_0 \approx 1)$

$$|e_k| < 10^{-10}$$

$$L_g^k < 10^{-10}$$

$$k \cdot \ln L_g < \ln 10^{-10} = -10 \ln 10$$

$$-k \ln L_g > 10 \ln 10$$

$$k > \frac{10 \ln 10}{-\ln L_g} = \frac{10 \ln 10}{-\ln \frac{1}{41}}$$

$$= \frac{10 \ln 10}{\ln 41} \quad (\approx 6.2)$$

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{\text{ca } 1 + \frac{10 \ln 10}{\ln 41} \text{ iterationer}}}$

(ca 7 iterationer)