MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Anders Logg, tel. 031–772 5346

TMV225 2016
2016–10–28 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M / TD

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

MATEMATISKA VETENSKAPER | **TMV225 2016**
Chalmers tekniska högskola | **2016–10–28 kl. 14.00–18.00 (SB)**
Examinator: Anders Logg | **Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Telefonvakt: Anders Logg, tel. 031–772 5346

TMV225 Inledande matematik M / TD

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $|10101_2 + x| + |10101_2 - x| > 101100_2$. (3p)

2. Bestäm $N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}$ så att $|\bar{x} - x_n| < \epsilon$ för $n \geq N$ då $x_n = (2n+3)/(3n+2)$ och $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \cos(\pi x/4)$ på intervallet $[\sqrt{2}, \pi]$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar tredje ordningens Maclaurin-polynom för funktionen $\sin(2x)$. (3p)

5. Låt $f(x) = (\sqrt{x}+1)/(\sqrt{x}-1)$. Bestäm $(f^{-1})(3)$. (3p)

6. Bestäm definitionsmängden för funktionen $f(x) = \ln(\sin(\pi x))$. (3p)

7. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x \tan x}$. (3p)

8. Bestäm $f'(0.5)$ om $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$ (3p)

9. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = \cos(3x)$. (3p)

10. Bestäm en approximation av $\sqrt{3}$ genom att utföra tre iterationer med Newtons metod för ekvationen $x^2 = 3$ och $x_0 = 1$. (3p)

---

11. Skriv ett program som beräknar maskinprecisionen ϵ_{mach} med hjälp av bisektionsalgoritmen. *Ledning: Låt* `f = @(x) 2*(1 + x > 1) - 1`. (5p)

12. Bevisa att derivatan av sin är cos. Du får utnyttja det kända gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \sin h/h$. (5p)

13. Låt $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ vara Fibonaccitalen $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, dvs $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ och låt $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden definierad av $y_n = x_{n+1}/x_n$. Visa att om $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergerar så är gränsvärdet $\bar{y} = (\sqrt{5}+1)/2$. (5p)

14. Newtons metod konvergerar (under vissa förutsättningar) kvadratiskt: (5p)

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2} KM |\bar{x} - x_n|^2.$$

(a) Härled en uppskattning (formel) för felet efter n iterationer. Antag att $|\bar{x} - x_0| = 0.01$ och $KM = 20$. (3p)
(b) Hur många iterationer krävs för att felet skall bli mindre än 10^{-100}? Bortse från avrundningsfel. (2p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Anders Logg, tel. 031–772 5346

TMV225 2016
2016–10–28 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M / TD

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TMV225 ①

TENTA 2016-10-28

1. $\overset{16\,8\,4\,2\,1}{10101}_2 = 16+4+1 = 21$

$\overset{32\,16\,8\,4\,2\,1}{101100}_2 = 32+8+4 = 44$

$$|21+x| + |21-x| > 44$$

$$|x-(-21)| + |x-21| > 44$$

Fall 1	Fall 2	Fall 3
$x < -21$	$-21 \le x \le 21$	$x > 21$
$-(x-(-21)) - (x-21) > 44$	$x-(-21) - (x-21) > 44$	$x - \cancel{(-21)} + x \cancel{-21} > 44$
$-2x \cancel{-21} \cancel{+21} > 44$	$\cancel{x} + 21 \cancel{-x} + 21 > 44$	$2x > 44$
$2x < -44$	$42 > 44$ ↯	$x > 22$ ok
$x < -22$ ok		

(Dividing points on the number line: -21, 21)

$\therefore$ Svar: $\underline{\underline{|x| > 22}}$

2. $x_n = (2n+3)/(3n+2) \longrightarrow \underbrace{2/3}_{=\bar{x}}$ då $n \to \infty$

$$|\bar{x} - x_n| = \left|\frac{2}{3} - \frac{2n+3}{3n+2}\right| = \frac{|2\cdot(3n+2) - 3\ (2n+3)|}{3\cdot(3n+2)}$$

$$= \frac{|\cancel{6n}+4-\cancel{6n}-9|}{9n+6} = \frac{5}{9n+6} < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow \quad 9n+6 > 5/\varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad n > \dfrac{5/\varepsilon - 6}{9}$

Svar: $\underline{\underline{N = \left\lceil \dfrac{5/\varepsilon - 6}{9} \right\rceil + 1}}$

3.

$$f(x) = \cos(\pi x/4)$$

$$L_f = \max|f'| = \max \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\pi x/4)$$

Maximum antas för $x = 2 \in [\sqrt{2}, \pi]$:

$$L_f = \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\pi \cdot 2/4) = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}} \text{ (Svar)}$$

4.

```
function y = maclaurin(x)
  y = 2*x - 4*x^3/3;
end
```

5.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = y$$

$$\sqrt{x}+1 = y \cdot (\sqrt{x}-1)$$

$$\sqrt{x} \cdot (1-y) = -(y+1)$$

$$\sqrt{x} = \frac{-(y+1)}{1-y}$$

$$x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 = \left(\frac{3+1}{3-1}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 2^2 = \underline{\underline{4.}} \text{ (Svar)}$$

Kontroll:

$$\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

$\underline{\underline{\text{ok}}}$

6.

$$f(x) = \ln \underbrace{(\sin(\pi x))}_{>0 \text{ ty argument till } \ln}$$

$$\sin(\pi x) > 0 \iff \pi x \in (0 + 2\pi n, \pi + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x \in (2n, 2n+1)$$

$\therefore$ Svar: $D(f) = \{x \in (2n, 2n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n, 2n+1)$$

7.

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\cdot\tan x} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

l'Hôpital:

$$f(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(x) = \cos(x^2)\cdot 2x \to 0 \text{ då } x\to 0$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\sin(x^2)\cdot 2x\, 2x + \cos(x^2)\cdot 2 \to 2 \text{ då } x\to 0$$

$$g(x) = x\tan x \Rightarrow g'(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} \to 0 \text{ då } x\to 0$$

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x - x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}$$

$$\to 1 + \frac{1-0}{1} = 2 \text{ då } x\to 0$$

$$\therefore \lim_{n\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\cdot\tan x} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}} \quad (\text{Svar})$$

8.

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

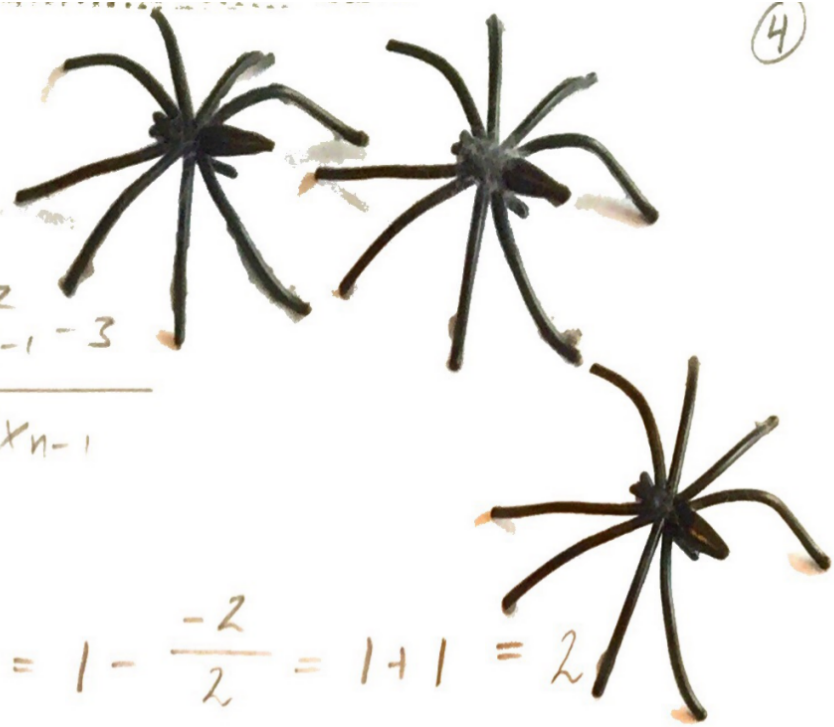
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}\cdot(-1) \Rightarrow f'(0.5) = \frac{1}{(1-0.5)^2} = 4$$

Svar: $\underline{\underline{4}}$

9.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\Rightarrow \cos(3x) = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^{2n}}{(2n)!} x^{2n}}} \quad (\text{Svar})$$



10.

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 3}{2x_{n-1}}$$

$$x_0 = 1$$

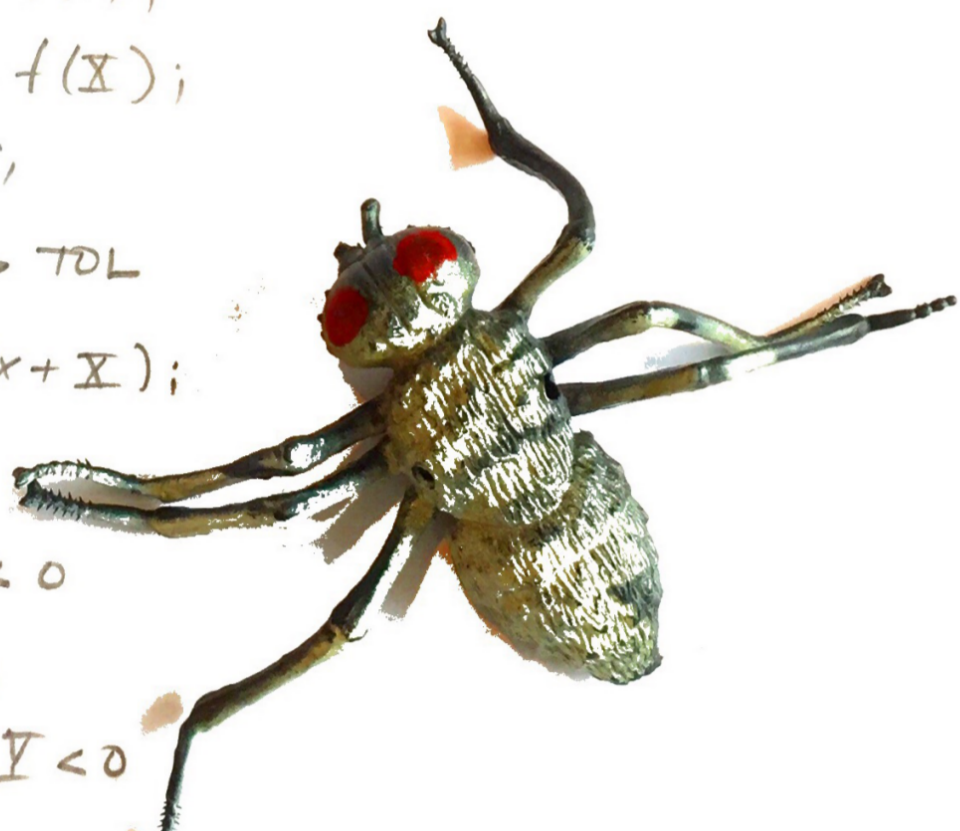
$$x_1 = 1 - \frac{1^2 - 3}{2 \cdot 1} = 1 - \frac{-2}{2} = 1 + 1 = 2$$

$$x_2 = 2 - \frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} = 2 - \frac{1}{4} = 1.75$$

Svar: $\underline{\underline{1.75}}$

11.

```
f = @(x) 2*(1+x>1)-1;
x = 0; y = f(x);
X = 1; Y = f(X);
TOL = 1e-20;
while X - x > TOL
  xx = 0.5*(x+X);
  yy = f(xx);
  if y*yy < 0
    X = xx;
  elseif yy*Y < 0
    x = xx;
  else
    break
  end
end
```



12. Se föreläsningsanteckningar!

13.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

$$y_n = x_{n+1} / x_n =$$

$$= \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{y_{n-1}}$$

$$\therefore \quad y_n = g(y_{n-1}), \quad g(y) = 1 + \frac{1}{y}$$

Fixpunkt: $y = g(y)$

$$y = 1 + \frac{1}{y}$$

$$y^2 = y + 1$$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$= (\sqrt{5} + 1)/2 .$$

$\square$

14.

$$e_{n+1} \leq \frac{1}{2} K M e_n^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot e_n^2 = 10 \cdot e_n^2$$

a)

$$e_0 = 10^{-2}$$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &\leq 10 \cdot e_0^2 = 10 \cdot 10^{-4} = 10^{-3} \\ e_2 &\leq 10 \cdot e_1^2 = 10 \cdot (10^{-3})^2 = 10^{-5} \\ e_3 &\leq 10 \cdot e_2^2 = 10 \cdot (10^{-5})^2 = 10^{-9} \\ e_4 &\leq 10 \cdot e_3^2 = 10 \cdot (10^{-9})^2 = 10^{-17} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Misstänker att } e_n \leq 10^{-2^n - 1}$$

Basfall: $e_0 = 10^{-2^0-1} = 10^{-2}$, $\underline{\text{ok}}$

$\underline{\text{Induktion}}$: Antag $e_n \le 10^{-2^n-1}$ för $n=\bar{n}$

$$\Rightarrow \quad e_{\bar{n}+1} \le 10 \cdot \left(10^{-2^{\bar{n}}-1}\right)^2$$

$$= 10 \cdot 10^{-2\cdot 2^{\bar{n}}-2} = 10^{-2^{(\bar{n}+1)}-1}, \quad \underline{\text{ok}}$$

$\therefore$ Induktion ger $\underline{\underline{e_n \le 10^{-2^n-1}}}$

b)

$$e_n < 10^{-100}$$

$$10^{-2^n-1} < 10^{-100}$$

$$2^n+1 > 100 \Leftrightarrow 2^n > 99$$

$$\Rightarrow \quad n=7 \qquad (2^7=128)$$

Svar: $\underline{\underline{n=7}}$