

TMV225 Inledande matematik M / TD

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårsläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

TMV225 Inledande matematik M / TD

Tentamensuppgifter

1. Lös olikheten $|10101_2 + 2x| - |10101_2 - 2x| > 101100_2$. (3p)
 2. Bestäm $N = N(\epsilon) \in \mathbb{Z}$ så att $|\bar{x} - x_n| < \epsilon$ för $n \geq N$ då $x_n = (n^2 - 1)/(n^2 + n)$ och $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (3p)
 3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = (\sin(2x))^2$ på intervallet $[-\pi, \pi]$. (3p)
 4. Bestäm inversen till funktionen $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. (3p)
 5. Bestäm alla kritiska punkter till funktionen $f(x) = x + \cos x$. (3p)
 6. Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin(x\pi))^5}{(x/3)^{3\pi}(1 - \cos^2(x\pi))}$. (3p)
 7. Bestäm värdet av serien $3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \dots$. (3p)
 8. Bestäm värdet av serien $3 - 1 + 1/3 - 1/9 + \dots$. (3p)
 9. Bestäm derivatan av $f(x) = \ln(\cos(\exp(x)))$ i punkten $x = \ln(\pi/3)$. (3p)
 10. Bestäm konvergensradien för serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{21^n}{5n^3} \left(\frac{2x+3}{7}\right)^n$. (3p)
-
11. Skriv ett program som löser ekvationen $\sin x = 0$ med bisektionsmetoden med ca 10 decimalers noggrannhet. (5p)
Var noggrann med att välja bra startpunkter!
 12. Bevisa att derivatan av \sin är \cos . Du får utnyttja det kända gränsvärdet $\lim_{h \rightarrow 0} \sin h/h$. (5p)
 13. Visa att $\{z_i = x_i + y_i\}$ är en Cauchy-följd om $\{x_i\}$ och $\{y_i\}$ är Cauchy-följder. (5p)
 14. Hur många inflexionspunkter har grafen till funktionen $f(x) = \cos(\ln(x))$? (1p)
Bestäm samtliga inflexionspunkter. (4p)

TMV225 Inledande matematik M / TD

Svar till tentamensuppgifter 1-10

Tentamenskod:

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TENTA 2016-12-22

1. $10101_2 = 1+4+16 = 21$, $101100_2 = 4+8+32 = 44$

$$|21+2x| - |21-2x| > 44$$

$$2x = -21 \Leftrightarrow x = -21/2$$

$$2x = +21 \Leftrightarrow x = +21/2$$

$21+2x < 0$	$21+2x > 0$	$21+2x > 0$
$21-2x > 0$	$21-2x > 0$	$21-2x < 0$
$-\frac{21}{2}$		$\frac{21}{2}$

Fall 1: $x < -21/2$

$$-(21+2x) - (21-2x) > 44$$

$$-2x + 2x > 44$$

$$0 > 44 \quad \text{!}$$

Fall 2: $-21/2 \leq x < 21/2$

$$21+2x - (21-2x) > 44$$

$$4x > 44$$

$$x > 11 \notin [-21/2, 21/2] \quad \text{!}$$

Fall 3: $x \geq 21/2$

$$21+2x + (21-2x) > 44$$

$$42 > 44 \quad \text{!}$$

∴ Lösung saknas!

$$2. \quad x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n} = \frac{n^2 - 1}{n(n+1)} = \frac{n-1}{n} \rightarrow 1 \text{ d\u00e5 } n \rightarrow \infty$$

$\underbrace{\quad}_{= \bar{x}}$

$$|x_n - \bar{x}| = \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + n} - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n-1-n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \therefore \text{Svar: } N(\varepsilon) = \underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon} + 1}}$$

$$3. \quad f(x) = (\sin(2x))^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 4 \sin(2x) \cos(2x)$$

$$= 2 \cdot \sin(4x)$$

$$\Rightarrow L_f = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f'(x)| = 2 \quad \therefore \text{Svar: } \underline{\underline{L_f = 2}}$$

$$4. \quad y = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow y(1-x) = 1+x$$

$$\Leftrightarrow y - yx = 1+x$$

$$\Leftrightarrow yx + x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (y+1) = y-1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\therefore \text{Svar: } \underline{\underline{f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}}}$$

$$5. \quad f(x) = x + \cos x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 - \sin(x)$$

$$0 = 1 - \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}}}$$

$$6. \frac{(2 \sin(x\pi))^5}{\left(\frac{x}{3}\right)^{3\pi} \cdot (1 - \cos^2(x\pi))} = \frac{32 \cdot (\sin(x\pi))^3 \cdot \cancel{(\sin(x\pi))^2}}{3^{-3\pi} \cdot (x\pi)^3 \cdot \cancel{\sin^2(x\pi)}}$$

$$= 32 \cdot 3^{3\pi} \cdot \left(\frac{\sin(x\pi)}{x\pi}\right)^3 \rightarrow 32 \cdot 3^{3\pi} \text{ da } x \rightarrow 0.$$

\therefore Svar: $32 \cdot 3^{3\pi}$

$$7. \quad 3 + 1 + 1/3 + 1/9 + \dots = 3 \cdot (1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots)$$

$$= 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2/3} = \underline{\underline{9/2}} = 4.5$$

$$8. \quad 3 - 1 + 1/3 - 1/9 + \dots = 3 \cdot (1 - 1/3 + 1/9 - 1/27 + \dots)$$

$$= 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1 - (-1/3)} = \frac{3}{4/3} = \underline{\underline{9/4}} = 2.25$$

$$9. \quad f(x) = \ln(\cos(\exp(x)))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos(\exp(x))} \cdot (-\sin(\exp(x))) \cdot \exp(x)$$

$$\Rightarrow f'\left(\ln\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{\cos(\pi/3)} \cdot (-\sin(\pi/3)) \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} \cdot \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{-\pi}{\sqrt{3}}}}$$

$$10. \quad \frac{21^n}{5n^3} \left(\frac{2x+3}{7} \right)^n = \underbrace{\left(\frac{21 \cdot 2}{7} \right)^n}_{= a_n} \cdot \frac{1}{5n^3} \cdot \left(x - \left(-\frac{3}{2} \right) \right)^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6^{n+1} / (5(n+1)^3)}{6^n / 5n^3} = 6 \frac{n^3}{(n+1)^3} \rightarrow 6$$

da $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow R = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

11.

$$x = -0.1;$$

$$y = \sin(x);$$

$$X = 0.11;$$

$$Y = \sin(X);$$

$$tol = 1e-10;$$

```

while X - x > tol
    xx = 0.5 * (x + X);
    yy = sin(xx);
    if y * yy < 0
        X = xx; Y = yy;
    elseif yy * Y < 0
        x = xx; y = yy;
    else
        break
    end
end
end

```

12. Se föreläsningssamtalningar!

13.

$$\begin{aligned} |z_i - z_j| &= |(x_i + y_i) - (x_j + y_j)| \\ &= |(x_i - x_j) + (y_i - y_j)| \\ &\leq |x_i - x_j| + |y_i - y_j| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

om $i, j \in \max(N_x(\varepsilon/2), N_y(\varepsilon/2))$ s.a.

$$i \in N_x(\varepsilon) \Rightarrow |x_i - x_j| < \varepsilon$$

$$j \in N_y(\varepsilon) \Rightarrow |y_i - y_j| < \varepsilon$$

14. Inflexionspunkt: $f''(x) = 0$

$$f(x) = \cos(\ln x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{\frac{\cos(\ln x)}{x} \cdot x - \sin(\ln x) \cdot 1}{x^2}$$

$$= (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) / x^2$$

\therefore inflexionspunkt då $\sin(\ln x) = \cos(\ln x)$, $x > 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot n$$

$$\Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$
