TMV225 Inledande matematik M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 7p) som tjänats ihop genom kursens tre duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Några tips och generella regler:

- Gör först de uppgifter som du tycker är lätta.
- Dubbelkolla dina svar på de uppgifter där endast svar skall lämnas.
- Alla svar skall ges på enklast möjliga form (förenkla).

Lycka till!

Anders

MATEMATISKA VETENSKAPER **TMV225 2017**
Chalmers tekniska högskola **2017–08–23 kl. 08.30–12.30 (SB)**
Examinator: Anders Logg **Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson, tel. 031–772 5325

TMV225 Inledande matematik M

Tentamensuppgifter

---

1. Lös olikheten $x^3 > 4x$. (3p)

2. Bestäm värdet av $\tan(\mathrm{acos}(0.5))$. (3p)

3. Bestäm (den bästa) Lipschitz-konstanten för funktionen $f(x) = \ln(1/x)$ på intervallet $[\epsilon, 1]$ för $0 < \epsilon < 1$. (3p)

4. Skriv en MATLAB-funktion som implementerar tredje ordningens Maclaurin-polynom för funktionen $\sin x$. (3p)

5. Bestäm minsta värdet för funktionen $f(x) = \frac{1+2x}{1-2x}$ på intervallet $[1, \infty]$. (3p)

6. Bestäm en Lipshitz-konstant för funktionen $h = 5f + 10g$ om $L_f = 2$ och $L_g = 3$. (3p)

7. Bestäm en formel för Maclaurin-utvecklingen av $f(x) = 1/(1 - x^{10})$. (3p)
Ledning: Geometrisk summa.

8. Bestäm lineariseringen av $f(x) = x \tan x$ runt $x = \pi$. (3p)

9. Bestäm $P_4(2\pi + 0.1)$ då P_4 är 4:e ordningens Taylorutveckling av $\cos(2x)$ runt $\bar{x} = 2\pi$. (3p)

10. Bestäm en approximation av $\sqrt{3}$ genom att utföra två iterationer med Newtons metod för ekvationen $x^2 = 3$ och $x_0 = 1$. (3p)

---

11. Skriv ett program som löser ekvationen $x^2 = 2$ med Newtons metod med ca 10 decimalers noggrannhet. (5p)

12. Formulera satsen om Lipschitz-kontinuitet för en produkt. (1p) (5p)

Genomför beviset (4p).

13. Bestäm alla fixpunkter till $g(x) = 5(\sin(2x) - \cos(3x)) + x$. (5p)

14. Låt f och g vara Lipschitz-kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ med Lipschitz-konstanter L_f, L_g och begränsade av M_f, M_g. Bestäm en Lipschitz-konstant för funktionen $h = f^2 g + f g^2$. (5p)

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Anders Logg
Telefonvakt: Sebastian Jobjörnsson, tel. 031–772 5325

TMV225 2017
2017–08–23 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV225 Inledande matematik M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

TENTA 2017-08-23

1. $x^3 > 4x$

$x = 0 \Rightarrow 0 > 0$ ↯

$x > 0 \Rightarrow \frac{x^3}{x} > \frac{4x}{x} \Leftrightarrow x^2 > 4$

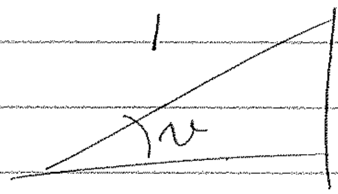
$\therefore x > 2$

$x < 0 \Rightarrow \frac{x^3}{x} < \frac{4x}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4$

$\therefore x \in (-2, 0)$

Svar: $\underline{\underline{x \in (-2,0) \cup (2, \infty)}}$

2.



$\sqrt{1 - 0.5^2} = \sqrt{0.75} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan v = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

3. $f(x) = \ln(1/x) = -\ln x$

$\Rightarrow f'(x) = -1/x \Rightarrow L_f = \max |f'| = \underline{\underline{1/\varepsilon}}$

4. function y = maclaurin(x)
y = x - x.^3/6

5. $f(x) = \frac{1+2x}{1-2x}$, $I = (1, \infty)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\cdot(1-2x) - (-2)\cdot(1+2x)}{(1-2x)^2}$

$= \frac{2-4x+2+2x}{(1-2x)^2} = \frac{4-2x}{(1-2x)^2}$

Extrempunkt:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4-2x=0 \Leftrightarrow x = 2 \in I$

Singulär punkt:

$1-2x=0 \Leftrightarrow x = 1/2 \notin I$

Undersök extrempunkter och ändpunkter:

$f(1) = 3/-1 = -3$

"$f(\infty)$" $= -1$

$f(2) = 5/-3 = -5/3$

Svar: $\underline{\underline{-3}}$

6.

$L_h \leq 5L_f + 10L_g = 10 + 30 = \underline{\underline{40}}$

7. $f(x) = 1/(1-x^{10})$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (x^{10})^k = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} x^{10k}}}$

8. $f(x) = x \tan x$

$\Rightarrow f'(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

$f(\pi) = \pi \tan \pi = 0$

$f'(\pi) = \tan \pi + \pi / \cos^2 \pi = 0 + \pi = \pi$

$\Rightarrow f(x) \approx 0 + (x - \pi) \cdot \pi = \underline{\underline{\pi x - \pi^2}}$

9.

$f(x) = \cos(2x)$	1	$x = 2\pi$, $\underline{\underline{2x = 4\pi}}$
$f'(x) = -2\sin(2x)$	0	
$f''(x) = -4\cos(2x)$	-4	
$f'''(x) = 8\sin(2x)$	0	
$f''''(x) = 16\cos(2x)$	16	

$\Rightarrow P_4(x) = 1 - 4 \cdot (x - 2\pi)^2 / 2! + 16 \cdot (x - 2\pi)^4 / 4!$

$\Rightarrow P_4(2\pi + 0.1) = 1 - 4 \cdot 0.1^2 / 2 + \cancel{16}^{2} \cdot 0.1^4 / \cancel{24}^{3}$

$= 1 - 0.02 + (2/3) \cdot 10^{-4}$

$= \underline{\underline{0.98 + \frac{2}{3} \cdot 10^{-4}}}$

10. $f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 3}{2 \cdot x_0} = 1 - \frac{-2}{2 \cdot 1} = 2$

$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 3}{2 \cdot x_1} = 2 - (4 - 3)/4 = 2 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{7/4}}$

11.
```
x = 1;
TOL = 1e-10;
dx = 2 * TOL;
while abs(dx) > TOL
    dx = -(x^2 - 2) / (2*x)
    x = x + dx
end
```

12. Se föreläsningsanteckningar

13.

$$g(x) = 5(\sin(2x) - \cos(3x)) + x$$

$$x = g(x)$$

$$\Rightarrow 5 \cdot (\sin(2x) - \cos(3x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \cos(3x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\pi/2 - 3x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi/2 - 3x + 2\pi n \\ 2x = \pi - (\pi/2 - 3x) + 2\pi n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi/2 + 2\pi n \\ -x = \pi/2 + 2\pi n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/10 + 2\pi n \\ x = -\pi/2 + 2\pi n \end{cases}$$

14. $h = f^2 g + f g^2$

$L(f^2) = M_f L_f + L_f M_f = 2 M_f L_f$

$L(g^2) = 2 M_g L_g$

$M(f^2) = M_f^2$

$M(g^2) = M_g^2$

$L(h) = M(f^2) L_g + L(f^2) M_g$
$+ M(g^2) L_f + L(g^2) M_f$

$= M_f^2 L_g + 2 M_f L_f \cdot M_g$
$+ M_g^2 L_f + 2 M_g L_g \cdot M_f$

$= L_f M_g \cdot (2 M_f + M_g)$

$+ L_g M_f \cdot (2 M_g + M_f)$