TMV 225 Inledande matematik

* **Idag:** Mängdlära (AL 1.1)

$\boxed{\text{F01}}$ Matematisk logik (AL 1.2)

Övningar: Räkna a) + b)
Problem: Alla udda uppgifter
Datorövn: Alla udda uppgifter

* 1.1 Mängdlära

Definition: Mängd

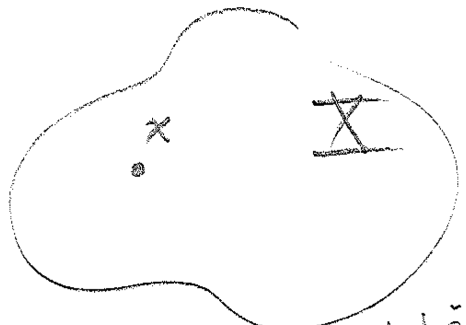
En samling av "objekt". Objekt i mängden kallas **element**.

tillhör

x element i $X \iff x \in X$

x ej element i $X \iff x \notin X$

tillhör inte

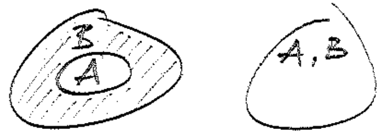


Exempel: behöver ej vara ordnad

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3\}$
$C = \{3, 4, 5, ☺, ♫\}$
$F = \{\ \} = \emptyset =$ tomma mängden

Definition: Relationer mellan mängder

- Inklusion: $A \subseteq B$



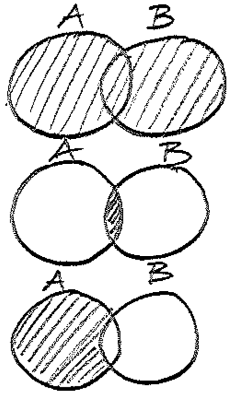
- Likhet : $A = B$ omm $A \subseteq B$ och $B \subseteq A$
- Strikt inklusion:

$A \subset B$ omm $A \quad B$ och $A \neq B$

"om och endast om"

Definition: Operationer på mängder

- Union : $A \cup B$
- Snitt : $A \cap B$
- Differens : $A \setminus B$
- Produkt : $A \times B$



Illustrationerna kallas "Venn-diagram"

$$\begin{array}{ccc} A & \times & B \\ \Psi & & \Psi \\ a & & b \end{array}$$

ordnade par

$\{(a, b)\}$

Exempel:

$B \subseteq A$

$B \subset A$

$F \subseteq A$

$F \subset A$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5,$ ☺, ♫$\}$

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$

$A \cap C = \{3, 4, 5\}$

$A \setminus B = \{4, 5\}$

$A \setminus C = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), \ldots, (5,1), (5,2), (5,3)\}$

* 1.2 Matematisk logik

Grundläggande notation:

"unär" $\neg$ negation ("icke")

"binära"

- $\wedge$ konjunktion ("och")
- $\vee$ disjunktion ("eller") ← Ej uteslutande (skrivs $\underline{\vee}$)
- $\Longrightarrow$ implikation ("medför")
- $\Longleftrightarrow$ ekvivalens ("betyder samma som")

Logisk utsaga: påstående som kan vara sant eller falskt (ha sanningsvärdet **T** eller **F**.

Exempel:

P = Solen är en stjärna. (**T**)

$Q = (1+1=2)$ (**T**)

$R = (5 \in \{1,2,3\})$ (**F**)

$S = (0/0 = 1)$ (ej logisk utsaga)

De 5 logiska operatorerna opererar på utsagor.

Definition: Logiska operatorer

$\neg$	P
F	T
T	F

P	$\wedge$	Q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	F	F

P	$\vee$	Q
T	T	T
T	T	F
F	T	T
F	F	F

P	$\Rightarrow$	Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

← Obs!

P	$\Leftrightarrow$	Q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	T	F

Sats: Logisk algebra

- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$, $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
  (kommutativa lagar)
- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$, $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
  (associativa lagar)
- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
  $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
  (distributiva lagar)
- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ (*)
  $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
  (de Morgans lagar)

Bevis: (av (*))

$\neg$	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	P	$\vee$	$\neg$	Q
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

En tautologi (alltid sann) ∎

Sats: Logisk slutledning

Modus ponens

$$P \Rightarrow Q$$
$$P$$
$$\therefore Q$$

"därför"

Modus tollens

$$P \Rightarrow Q$$
$$\neg Q$$
$$\therefore \neg P$$

Bevis: Se problem 1.2 ▨

Påståenden beror ofta på variabler:

$$P(a,b) = ((a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2))$$

$$Q(x) = (x^2 = 2)$$

Är då praktiskt att arbeta med "kvantorer": $\forall, \exists, \exists!$

Definition: Kvantorer

$$\forall x \in X : P(x) \quad \text{"för alla"}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in X \Rightarrow P(x)$$

"P är sann för alla x i X"

$$\exists x \in X : P(x) \quad \text{"för något"}$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x \in X : \neg P(x)$$

"P är sann för något x i X."

Om unikt: $\exists!$

Exempel: Kvantorer

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

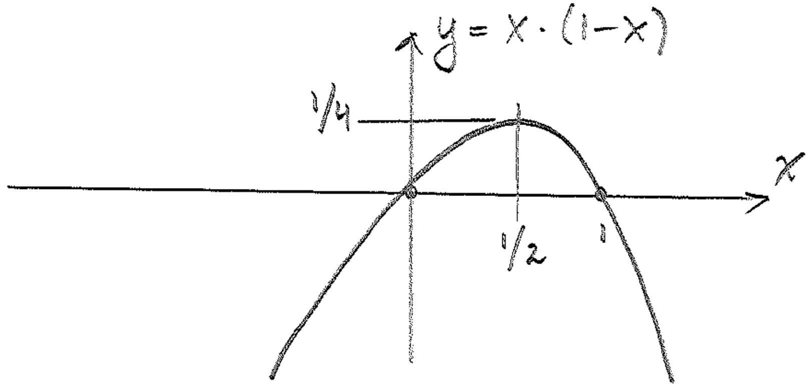
$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$

$$\exists ! x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \wedge x > 0$$

Exempel: Konstruktion av mängder

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} = (2, \infty)$$

$$\{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : a + x(1-x) < 1\} = (-\infty, 3/4)$$



* Sammanfattning

Mängdrelationer

$\in$

$\subseteq$

$\subset$

$=$

Mängdoperationer

$\cup$

$\cap$

$\setminus$

$\times$

Logik

$\neg$

$\wedge$

$\vee$ $\underline{\vee}$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Kvantorer

$\forall$

$\exists$

$\exists!$