* <u>Idag:</u> • Rationella tal (AL 1.3)

$\boxed{\text{F02}}$ • Talföljder och konvergens (AL 1.4)

* <u>1.1 Rationella tal</u>

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$
naturliga talen	hela talen	rationella talen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

<u>Notera:</u> $p \in \mathbb{Z} \longleftrightarrow p/1 \in \mathbb{Q}$

<u>Sats:</u> Algebraiska egenskaper för $\mathbb{Q}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$:

$x + y \in \mathbb{Q}$	(sluten)
$xy \in \mathbb{Q}$	(sluten)
$x + y = y + z$	(komm.)
$xy = yx$	(komm.)
$(x+y)+z = x+(y+z)$	(assoc.)
$(xy)z = x(yz)$	(assoc.)
$x \cdot (y+z) = xy + xz$	(distr.)
$x + 0 = x$	(add. ident.)
$1x = x$	(mult. ident.)
$\exists -x \in \mathbb{Q} : x + (-x) = 0$	(add. inv.)
$x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in \mathbb{Q} : xx^{-1} = 1$	(mult. inv.)

Notera: Existens av $(-x)$ och x^{-1} möjliggör definition av subtraktion och division:

$$\begin{cases} x-y = x+(-y) \\ x/y = xy^{-1}, \quad y \neq 0 \end{cases}$$

Notera: $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ saknar några av dessa egenskaper.

- $\mathbb{N}$ saknar $-x$ och x^{-1}
- $\mathbb{Z}$ saknar x^{-1}

($\mathbb{Q}$ är en "kropp"/"field"
$\mathbb{Z}$ är en "ring"
$\mathbb{N}$ är en "semiring")

Sats: Ordningsegenskaper för $\mathbb{Q}$

$\forall x,y \in \mathbb{Q}$:

$$x=y \;\underline{\vee}\; x<y \;\underline{\vee}\; x>y$$

$$x<y \iff y>x$$

$$x<y \wedge y<z \Rightarrow x<z$$

$$x<y \Rightarrow x+z<y+z$$

$$x<y \wedge z>0 \Rightarrow xz<yz$$

Definition: Absolutbelopp

$\forall x \in \mathbb{Q}$:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Sats: Triangelolikheterna

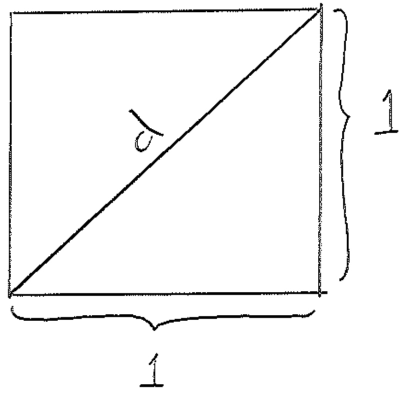
$\forall x,y \in \mathbb{Q}$:

$$|x \pm y| \leq |x|+|y|$$

$$||x|-|y|| \leq |x \pm y| \quad \text{(omvända triangelolikheten)}$$

Endast översiktligt på föreläsningen. Se boken!

De rationella talen räcker långt men de räcker inte till allt!



$d = ?$ $d \in \mathbb{Q}$?

<u>Sats:</u> $\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal

$$\neg(x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2)$$

<u>Bevis:</u>

Antag: $x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2$

$\Rightarrow$ $x = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$

Förkorta så att p och q saknar gemensamma faktorer ("relativt prima")

$$x = p'/q'$$

$\Rightarrow$ $x^2 = (p'/q')^2 = 2$

$\Rightarrow$ $(p')^2 = 2(q')^2$ (*)

$\Rightarrow$ $(p')^2$ delbart med 2

$\Rightarrow$ p' delbart med 2

$\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z} : p' = 2k$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $(2k)^2 = 2(q')^2$

$\Rightarrow$ $\cancel{4}^{2} k^2 = \cancel{2}(q')^2$

$\Rightarrow$ $2k^2 = (q')^2$

$\Rightarrow$ $(q')^2$ delbart med 2

$\Rightarrow$ q' delbart med 2

$\Rightarrow$ p' och q' båda delbara med 2!

↯ motsägelse

$\Rightarrow$ $\neg(x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 = 2)$ ∎

"reductio ad absurdum"

* 1.4 Talföljder och konvergens

Vi måste (uppenbarligen) utvidga $\mathbb{Q}$, eftersom $\sqrt{2}$ och många andra tal saknas i $\mathbb{Q}$. Vårt grundläggande verktyg kommer att vara talföljder av rationella tal.

Definition: Talföljd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$

En regel som för varje $n \in \mathbb{N}$ bestämmer ett entydigt värde x_n i en mängd X.

Exempel:

(1) $x_n = 2n$: $0, 2, 4, 6, \ldots$ (jämna talen)

(2) $x_n = 2n+1$: $1, 3, 5, 7, \ldots$ (udda talen)

(3) $x_0 = x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

Fibonacci-tal: $1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

(4) $y_n = x_{n+1}/x_n$ där $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ är Fibonacci-talen

$1, 2, 1.5, 1.66\ldots, 1.625, \ldots$

$\rightarrow \phi = (\sqrt{5}+1)/2$

"Gyllene snittet"

(5) $x_n = 1/(n+1)$: $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$

$\rightarrow 0$

(6) $x_0 = 1$, $x_n = \dfrac{x_{n-1} + 2/x_{n-1}}{2}$

$x_0 = 1 \qquad = 1$

$x_1 = 3/2 \qquad = 1.5$

$x_2 = 11/8 \qquad = 1.375$

$x_3 = 183/128 \qquad \approx 1.43$

$x_4 = 46127/32768 \qquad \approx 1.41$

$\longrightarrow \sqrt{2}$! (?)

Notera: Talföljderna (4), (5) och (6) är speciella!

- De ser ut att närma sig något. (Men vad?)
- De ser ut att stabiliseras.

$$\boxed{\text{Närma sig något} \Longleftrightarrow \text{stabiliseras}} \quad (*)$$

- Kan en talföljd närma sig något utan att stabiliseras?
- Kan en talföljd stabiliseras utan att närma sig något?

Vi kommer att definiera två viktiga begrepp:

Konvergens = närma sig något

Cauchy-följd = stabiliseras

Vi kommer också att svara på frågan (*).

Definition: Konvergent rationell talföljd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ med gränsvärde $\bar{x} \in \mathbb{Q}$.

ε positivt rationellt tal

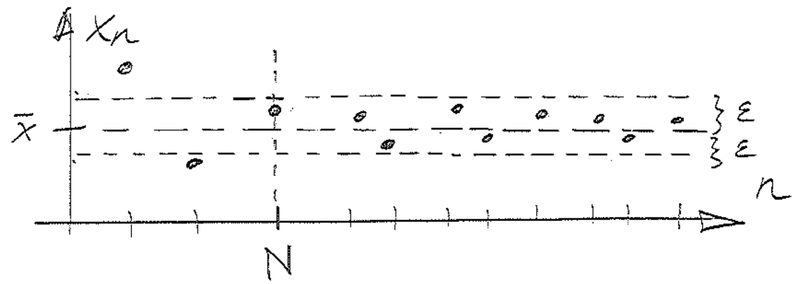
$$\boxed{\begin{aligned} &\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \ \exists N \in \mathbb{N} : \\ &\quad n \geq N \Longrightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon \end{aligned}}$$

(superviktig definition!)

Skrivsätt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$$

$$x_n \to \bar{x} \text{ då } n \to \infty$$



Tolkning:

Talföljd (x_n) anklagad för att inte vara konvergent.

Vår uppgift som försvarare (matematiker) att försvara talföljdens konvergens...

Åklagare: – (x_n) är inte konvergent!

Försvar: – Joho! Ty $|x_n - \bar{x}|$ kan göras hur liten som helst.

Å: – Det tror jag inte på.

F: – Bring it on!

Å: – OK, kan du göra $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon = 10^{-6}$

F: – Enkelt, tag bara $n \geq N = 1000$.

Å: – OK, men jag vill se $|\bar{x} - x_n| < \varepsilon = 10^{-100}$!!!

F: – Nemas problemas, tag bara $n \geq N = 39765$.

Å: – OK, OK, jag tror dig!

Exempel: (x_n), $x_n = 1/n$ konvergent

(Harmonisk talföljd)

$$x_n = 1/n \to \bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow |x_n - \bar{x}| = |1/n - 0| = 1/n$$

$$\le 1/N, \text{ ty } n \ge N$$

$$< \varepsilon \ ?$$

Ja, om

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad N > 1/\varepsilon$$

avrundning uppåt

Tag $N = \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$

(Funkar faktiskt också med $N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$.)

Definition: Cauchy-följd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ Rationell

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \ \exists N \in \mathbb{N}: \quad m, n \ge N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon}$$

Med andra ord: Om m och n är stora så kommer x_m och x_n godtyckligt nära – talföljden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ stabiliseras.

Sats: $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ (rationell) konvergent

$$\Rightarrow (x_n)_{n=0}^{\infty} \text{ Cauchy-följd}$$

Med andra ord:

"närma sig något" ⇒ "stabiliseras"

Bevis: "Lägg till och dra ifrån"

$$|x_m - x_n| = |x_m - \bar{x} + \bar{x} - x_n|$$

$$\le |x_m - \bar{x}| + |\bar{x} - x_n|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

triangelolikheten

Förutsatt att:

$m, n \geq N$ sådant att

$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon/2$

Möjligt ty $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent.

$\therefore$ $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ är en Cauchy-följd. $\blacksquare$

Sats: Rationell talföljds gränsvärde är alltid unikt.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to \bar{x} \\ x_n \to \tilde{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} = \tilde{x}.$$

Bevis: Se boken.

Sammanfattning:

$$(x_n)_{n=0}^{\infty} \text{ konvergent}$$
$$\Downarrow$$
$$(x_n)_{n=0}^{\infty} \text{ Cauchy-följd}$$

Med andra ord:

"närma sig något" $\Rightarrow$ "stabiliseras"

Den stora frågan är:

Gäller det omvända?

Vi svarar på denna mycket fundamentala cliffhanger på morgondagens föreläsning ....