Varning: troligtvis den mest krävande föreläsningen!

* Idag: • Reella tal (AL 1.5)

$\boxed{\text{F03}}$ (• Datorrepresentation av reella tal (AL 1.6)) Självstudie!

Vi har sett att:

– De rationella talen $\mathbb{Q}$ har "hål", ty $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

– Vi kan approximera $\sqrt{2}$ med en talföljd $(x_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$x_0 = 1$$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 2/x_{n-1}}{2}$$

$$\rightarrow \sqrt{2}\ ?$$

– Talföljder som konvergerar mot något (är konvergenta) måste också stabiliseras (vara Cauchy-följder).

– Men: Rationella Cauchy-följder måste inte vara konvergenta!

Exempel: $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ stabiliseras men är ej konvergent mot något $\bar{x} \in \mathbb{Q}$ (ty $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Lösning: Nytt talsystem $\mathbb{R}$, de reella talen

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{alla hål i } \mathbb{Q}\}$$

– Hur fyller vi igen hålen?

– Hur definierar vi $\mathbb{R}$?

– Vad är $\sqrt{2}$?

Svar:

"$x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ = Cauchy-följd = reellt tal!"

Definition: Ekvivalenta Cauchy-följder

(x_n) och (y_n) ekvivalenta omm

$$z_n \to 0$$

där $z_n = x_n - y_n$.

Skrivsätt:

$(x_n) \sim (y_n)$ "är ekvivalenta"

$$\underbrace{[(x_n)]} = \{(y_n) \mid (y_n) \sim (x_n)\}$$

mängden av (ekvivalensklassen) av alla Cauchy-följder som är ekvivalenta med (x_n).
("konvergerar mot samma sak")

Definition: De reella talen $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ = {ekvivalensklasser av rationella Cauchy-följder}

$$x \in \mathbb{R} \iff x = [(x_n)]$$

representant för x
(men inte den enda)

Exempel: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

(1) $x_0 = 1$

$$x_n = \frac{x_{n-1} + 2/x_{n-1}}{2} \text{ "}\to \sqrt{2}\text{"}$$

$$\sqrt{2} = [(x_n)]$$

Notera: $(x_n) \sim (y_n)$

(2) $y_0 = 1$

$$y_n = y_{n-1} - 0.1 \cdot (y_{n-1}^2 - 2) \text{ "}\to \sqrt{2}\text{"}$$

$$\sqrt{2} = [(y_n)]$$

(i) Hur räknar vi med reella tal?
(Vad är $x+y$?)

(ii) Är $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$? (Ja!)

(iii) Är Cauchy-följder av reella tal konvergenta? (Ja!)

Definition: Algebraiska operationer på de reella talen

$x = [(x_n)] \in \mathbb{R}$

$y = [(y_n)] \in \mathbb{R}$

svar på fråga (i)

(1) $x+y = [(x_n + y_n)]$

(2) $x-y = [(x_n - y_n)]$

(3) $xy = [(x_n y_n)]$

((4) $x/y = [(x_n/\tilde{y}_n)]$

$y \neq 0$, $(\tilde{y}_n) \sim (y_n)$, $\forall n: \tilde{y}_n \neq 0$)

Är dessa operationer väldefinierade?

Sats: De algebraiska operationerna på $\mathbb{R}$ är väldefinierade

Bevis: (av (1), dvs $x+y$)

(x_n) Cauchy, (y_n) Cauchy

Låt $z_n = x_n + y_n$.

Är (z_n) Cauchy? I så fall är $x+y = [(x_n+y_n)] = [(z_n)] \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
|z_m - z_n| &= |(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| \\
&= |(x_m - x_n) + (y_m - y_n)| \\
&\overset{\text{triangelolikheten}}{\leq} |x_m - x_n| + |y_m - y_n| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

om $m,n \geq N$ för något N tillräckligt stort, ty (x_n) och (y_n) är Cauchy-följder.

Överkurs. (Beror värdet på $x+y$ av vilken representant som väljs?

Låt $(\tilde{x}_n) \sim (x_n)$ och $(\tilde{y}_n) \sim (y_n)$.

Låt $z_n = x_n + y_n$ och $\tilde{z}_n = \tilde{x}_n + \tilde{y}_n$

Är $(z_n) \sim (\tilde{z}_n)$?

$$z_n - \tilde{z}_n = (x_n + y_n) - (\tilde{x}_n + \tilde{y}_n)$$
$$= \underbrace{(x_n - \tilde{x}_n)}_{\to 0} + \underbrace{(y_n - \tilde{y}_n)}_{\to 0}$$
$$\to 0 \text{ då } n \to \infty$$

$\Rightarrow (z_n) \sim (\tilde{z}_n)$)

$\therefore$ $x+y$ är väldefinierad. ▨

Svar på fråga (ii).

$X \in \mathbb{Q} \Rightarrow X \in \mathbb{R}$?

Låt $x_n = X$ för alla n.

$X, X, X, X, \ldots$

$\Rightarrow (x_n)$ Cauchy, ty $|x_m - x_n| = |X - X| = 0 < \varepsilon$

$\therefore$ $X \in \mathbb{Q} \longleftrightarrow x = [(x_n)] \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

(strikt delmängd ty $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ men $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

<u>Sats:</u> Algebraiska egenskaper för $\mathbb{R}$

Samma som för $\mathbb{Q}$!

$x + y = y + x$ osv.

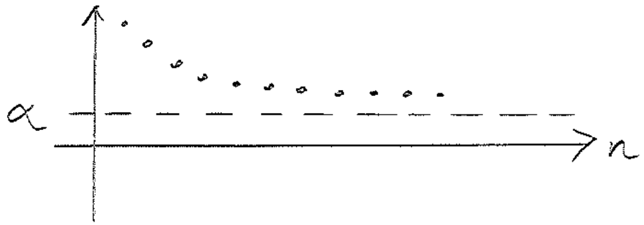
<u>Bevis:</u>

Obs! Rationella tal

$$x + y = [(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$$
$$= [(y_n + x_n)] = [(y_n)] + [(x_n)] = y + x. \text{ ▨}$$

<u>Definition:</u> Positivt reellt tal
Negativt reellt tal

$x > 0$ om finns representant (x_n) sådan att $\forall n: x_n \geq \alpha > 0$ för något $\alpha > 0$.



$x < 0$ definieras på motsvarande sätt: $x_n \leq -\alpha < 0$.

<u>Sats:</u> Ordningsegenskaper för $\mathbb{R}$
Samma som för $\mathbb{Q}$!

<u>Definition:</u> Absolutbelopp
Samma som för $\mathbb{Q}$!

<u>Sats:</u> Triangelolikheterna

<u>Definition:</u> (x_n) konvergent reell talföljd
Obs!

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \\ \quad n \geq N \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon\end{array}}$$

gränsvärdet

<u>Definition:</u> (x_n) reell Cauchy-följd

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \\ \quad m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon\end{array}}$$

<u>Notera:</u> Varje x_n i (x_n) är nu en ekvivalensklass av rationella Cauchy-följder ... :-)

Sats: De reella talens fullständighet

(x_n) reell Cauchy-följd

$\Leftrightarrow$ (x_n) konvergent reell talföljd

Med andra ord:

Cauchy $\Leftrightarrow$ $\exists! \bar{x} \in \mathbb{R} : x_n \to \bar{x}$.

Svar på fråga (iii)

Bevis: Se boken (överkurs)

Mycket viktig sats!!!

Har stor praktisk betydelse.

Om vi kan konstruera beräknings-algoritmer som genererar Cauchy-följder så vet vi att de konvergerar.

$\mathbb{R}$ representeras i datorn (oftast) med 16 siffrors noggrannhet:

- $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-16}$
- $x + y = (x+y) \cdot (1 \pm \varepsilon)$
- Se avsnitt 1.6 (översiktligt)

* Sammanfattning:

Ekvivalenta Cauchy-följder

$(x_n) \sim (y_n)$

Reella tal:

$$\mathbb{R} = \{ x = [(x_n)] \}$$

rationell Cauchy-följd

$+, -, \cdot, /$ väldefinierade

Om (x_n) är en reell talföljd:

(x_n) konvergent

$\Longleftrightarrow$

(x_n) Cauchy

"$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-16}$"