* **Idag:**
- Polynom och rationella funktioner (AL 2.3)
- Potensfunktioner (AL 2.4)

$\boxed{F05}$

2.3 Polynom och rationella funktioner

Elementära funktioner = funktioner som kan uttryckas med hjälp av ändliga kombinationer av de 4 räknesätten, rötter, exponenter och logaritmer.

(Inkluderar trig. funktioner och deras inverser).

Definition: Polynom

$\underbrace{\text{Linjärkombination}}_{=\text{viktad summa}}$ av $\underbrace{\text{monom}}_{=x^k}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$= a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

n = polynomets grad ($a_n \neq 0$)

Sats: Polynomdivision

p, q polynom

$\Rightarrow$ Entydigt bestämda polynom k och r som uppfyller

$$\frac{p}{q} = \underbrace{k}_{\text{krot}} + \frac{\overset{\text{rest}}{r}}{q} \qquad \boxed{\text{grad } r < \text{grad } q}$$

Sats: Faktorsatsen

p polynom av grad ≥ 1

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ nollställe (rot) till p omm
$(x-\bar{x})$ faktor i p, dvs

"om och endast om"

$$p(x) = (x-\bar{x}) \cdot q(x)$$

grad q = grad $p - 1$

Exempel:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Notera att $p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow$ $(x-2)$ faktor i p, dvs

$$p(x) = (x-2) \cdot q(x)$$

Bestäm q mha polynomdivision

"Liggande stolen":

$$\begin{array}{rl}
x^2 + 1 & = k(x) \\
\hline
\cancel{x^3} - \cancel{2x^2} + x - 2 & \big| \; x-2 \\
- \; \cancel{x^3} - \cancel{2x^2} & \\
\hline
x - 2 & \\
x - 2 & \\
\hline
0 & = r(x)
\end{array}$$

$$\therefore \; \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x-2} = \underbrace{x^2+1}_{=k(x)} + \frac{\overbrace{0}^{=r(x)}}{x-2}$$

$$\Rightarrow \; x^3 - 2x^2 + x - 2 = \underline{\underline{(x-2) \cdot (x^2+1)}}$$

Algebrans fundamentalsats

$\Rightarrow$ $x^2 + 1$ har 2 (komplexa) rötter

$$x^2+1=0$$

$$x^2=-1$$

$$x=\pm i$$

$$\Rightarrow \quad x^2+1=(x+i)(x-i)$$

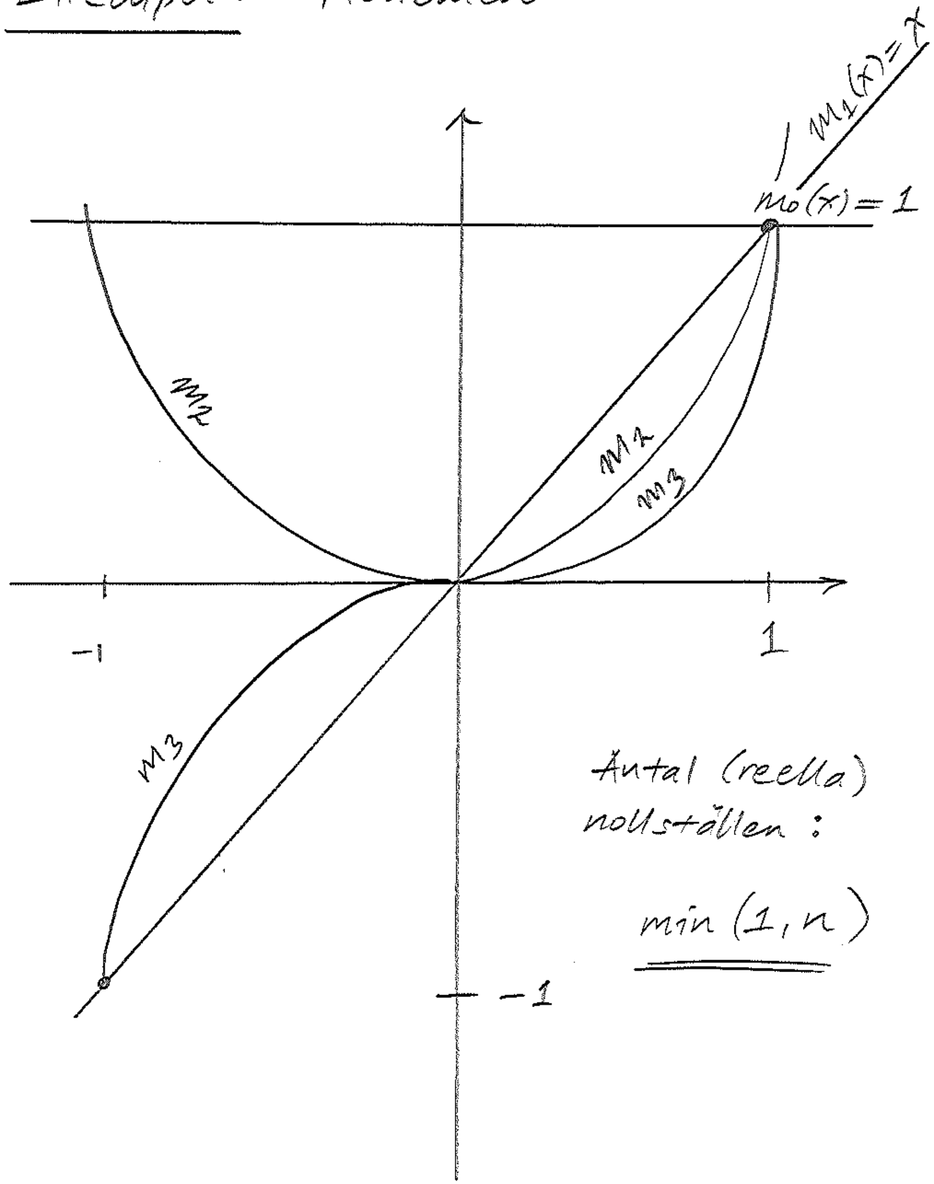
$$\Rightarrow \quad p(x)=x^3-2x^2+x-2$$

$$=\underline{\underline{(x-2)(x+i)(x-i)}}$$

Polynom av grad n har alltid n rötter och därmed n faktorer.

(Men några av rötterna kan vara ickereella och några kan vara multipla.)

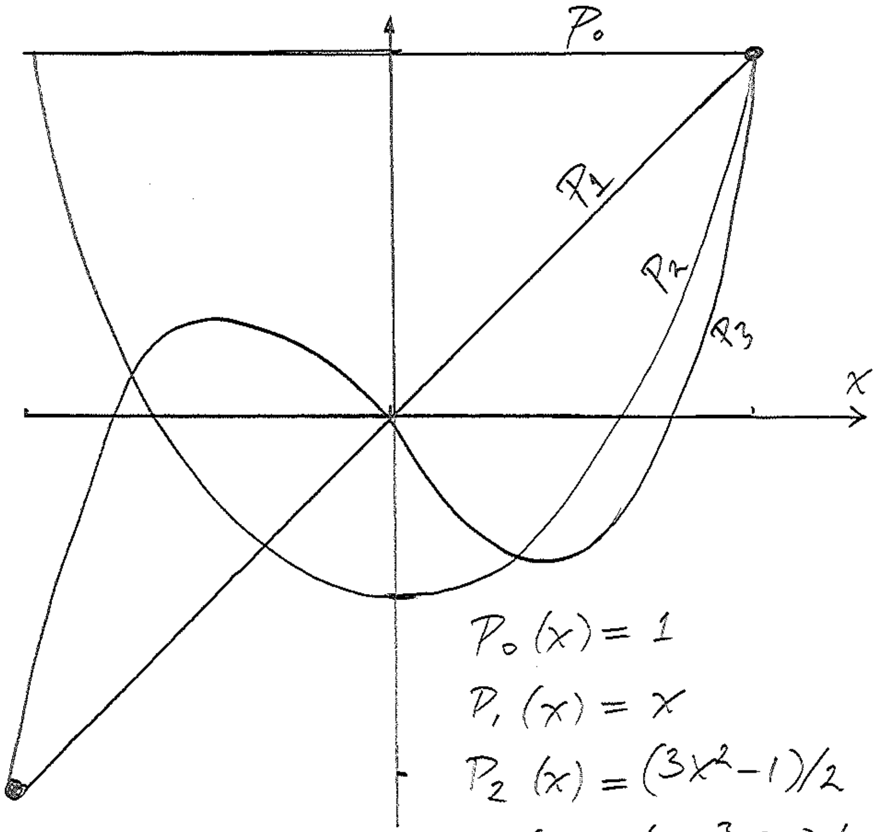
Exempel: Monomen



Antal (reella) nollställen:

$\underline{\underline{\min(1,n)}}$

* Exempel: Legendre-polynom



$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = (3x^2-1)/2$

$P_3(x) = (5x^3-3x)/2$

Antal nollställen: $\underline{\underline{n}}$

Definition: Rationell funktion

p, q polynom, $\underline{\underline{f = p/q}}$

$\underline{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

Exempel: $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 - 1}$

Asymptoter?

(i) $x \to \pm\infty$: $f(x) \approx \dfrac{2x^3}{x^2} = 2x$

(ii) $y \to \pm\infty$: $0 \approx \dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2-1}{2x^3-x}$

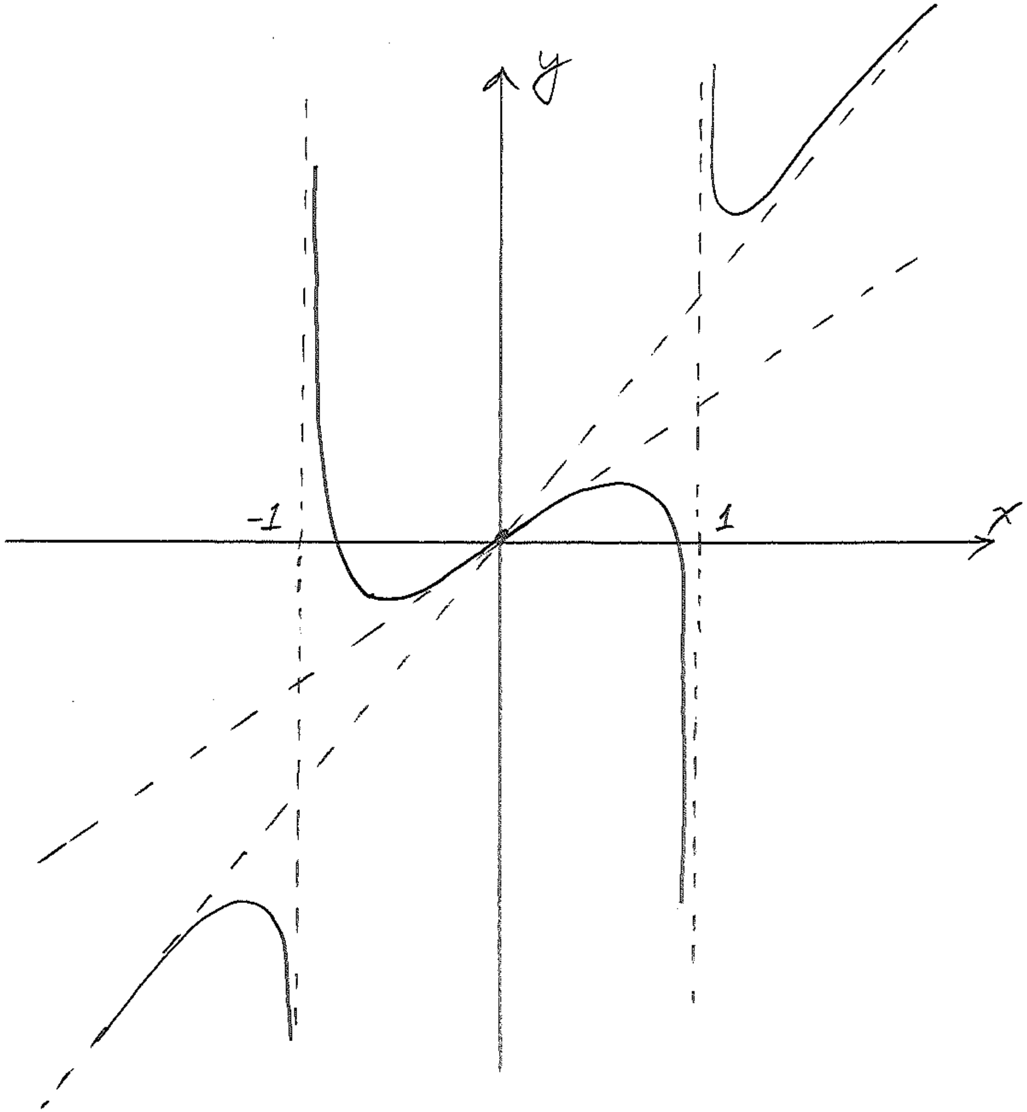
(men x begränsad)

$\Rightarrow x = \pm 1$

Hur uppför sig funktionen då $x \approx 0$?

$x \approx 0 \Rightarrow f(x) \approx \dfrac{0-x}{0-1} = x$

$p(0) = 0$



$$f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 - 1}$$

2.4 Potensfunktionen

Monomfunktionen $m_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Potensfunktionen $\text{pow}_\alpha(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Hur definiera $\text{pow}_\alpha(x) = x^\alpha$?

Om $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, låt $y = x^{p/q}$ vara lösning till ekvationen

$$y^q = x^p$$

Hur många reella lösningar?

q jämn $\Rightarrow$ 2 lösningar om $x^p > 0$
0 lösningar om $x^p < 0$

q udda $\Rightarrow$ 1 lösning om $x^p > 0$
1 lösning om $x^p < 0$

Exempel: $(-2)^3 = -8$, $(-8)^{1/3} = -2$

Men: För att göra det "enkelt" begränsar vi oss till $x > 0$.

Definition: x^α, $\alpha \in \mathbb{Q}$

Låt $\alpha = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

x^α = unik positiv lösning y till ekvationen

$$y^q = x^p, \quad x > 0$$

Definition: x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$

Alternativ 1: $x^\alpha = \lim_{r \to \alpha} x^r$

gränsvärde! (läsvecka 3)

Alternativ 2: $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$

(föreläsning 06

Sats: Potensfunktionens egenskaper

$x^\alpha > 0$

gränsvärde! lv 3

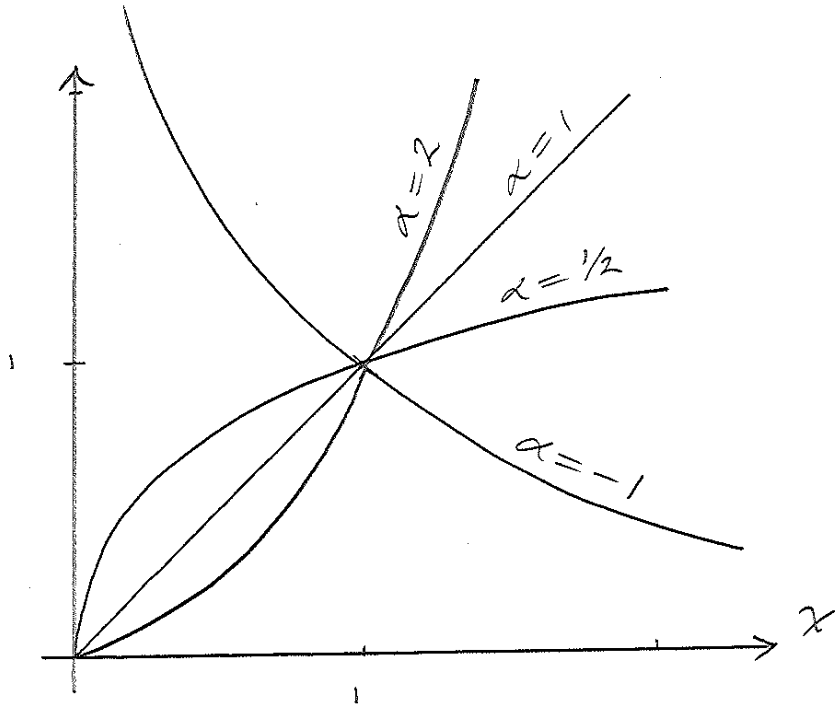
$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = 0$ $\quad \lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty$ $\quad (\alpha > 0)$

$\lim_{x \to 0+} x^\alpha = \infty$ $\quad \lim_{x \to \infty} x^\alpha = 0$ $\quad (\alpha < 0)$

$x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$ $\quad x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ $\quad x^{\alpha-\beta} = x^\alpha x^{-\beta} = x^\alpha / x^\beta$

$(x_1 x_2)^\alpha = x_1^\alpha x_2^\alpha$ $\quad (x_1/x_2)^\alpha = x_1^\alpha x_2^{-\alpha} = x_1^\alpha / x_2^\alpha$



Notera:

- pow_2 och $pow_{1/2}$ är varandras spegelbilder i pow_1 $(y = x)$
- pow_α och $pow_{1/\alpha}$ är varandras spegelbilder i pow_1
- pow_α och $pow_{1/\alpha}$ är varandras inverser:

$$(pow_\alpha \circ pow_{1/\alpha})(x) = pow_\alpha(pow_{1/\alpha}(x))$$
$$= pow_\alpha(x^{1/\alpha})$$
$$= (x^{1/\alpha})^\alpha = x^{1/\alpha \cdot \alpha} = x^1 = \underline{\underline{x}}$$