* **Idag:**
- Gränsvärde (AL 3.1)
- Kontinuitet (AL 3.2)

$\boxed{\text{F07}}$

3.1 Gränsvärde

Gränsvärde för talföljd:

$$x_n \to \bar{x} \text{ då } n \to \infty$$

$$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon \Leftarrow n \geq N$$

Gränsvärde för funktion:

$$f(x) \to \bar{y} \text{ då } x \to \bar{x}$$

$$|f(x) - \bar{y}| < \varepsilon \Leftarrow |x - \bar{x}| < \delta$$

Definition: Gränsvärde

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har gränsvärdet $\bar{y}$ i punkten $\bar{x}$ om

Notera!

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon$$

Skrivsätt:

1) $f(x) \to \bar{y}$ då $x \to \bar{x}$

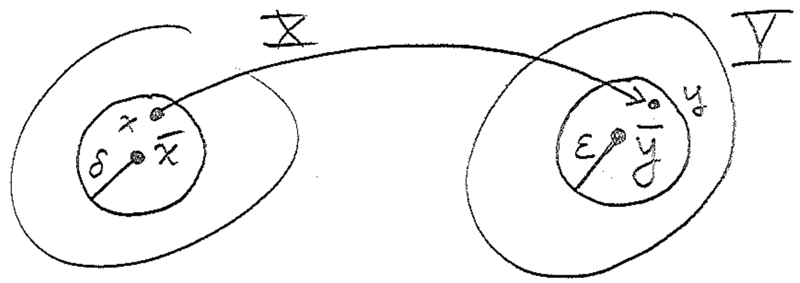
2) $\displaystyle\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$

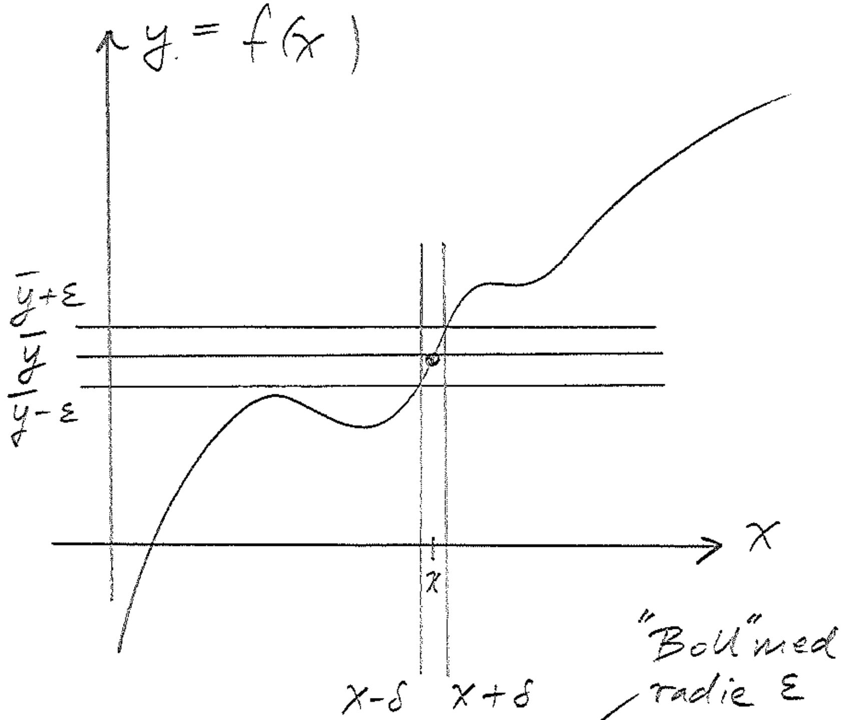
Notera:

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

(Egentligen $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}, f)$!)

Illustration :





"Boll" med radie ε

$$x \in B_\delta(\bar{x}) \Longrightarrow y \in B_\varepsilon(\bar{y})$$

Exempel :

$$f(x) = \frac{3x+5}{2x+2}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{8}{4} = 2$$

Visa detta !

Låt $x = \bar{x} + \Delta x = 1 + \Delta x$

$$\Rightarrow |f(x) - \bar{y}| = \left| \frac{3\cdot(1+\Delta x)+5}{2\cdot(1+\Delta x)+2} - 2 \right|$$

$$= \left| \frac{3+3\Delta x+5}{4+2\Delta x} - \frac{2\cdot(4+2\Delta x)}{4+2\Delta x} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{8}+3\Delta x - \cancel{8} - 4\Delta x}{4+2\Delta x} \right| = \left| \frac{\Delta x}{4+2\Delta x} \right|$$

$$\leq \{\text{Antag } \Delta x < 1\} \leq \frac{|\Delta x|}{4-2}$$

$$= \frac{|\Delta x|}{2} < \varepsilon, \quad \text{om } |\Delta x| < \underline{\underline{2\varepsilon}} .$$

$$\therefore \quad \delta(\varepsilon) = \min(1, 2\varepsilon) .$$

Definition: Ensidigt gränsvärde

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har högergränsvärdet $\bar{y}$ i punkten $\bar{x}$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < x - \bar{x} < \delta$$
$$\Longrightarrow |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon$$

Skrivsätt:

1) $f(x) \to \bar{y}$ då $x \to \bar{x}+$

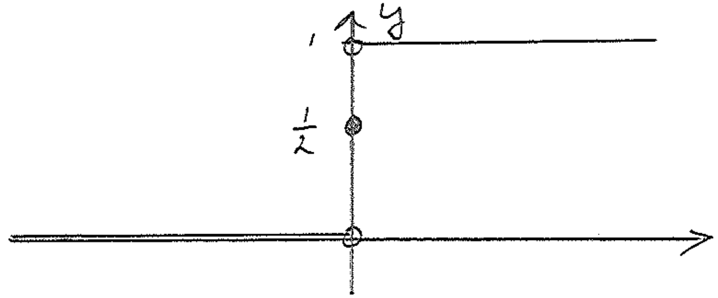
2) $\lim\limits_{x \to \bar{x}+} f(x) = \bar{y}$

På samma sätt $(x < \bar{x})$ definieras vänstergränsvärdet

$$\lim_{x \to x-} f(x) = \bar{y}$$

Exempel: Heavisides stegfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0+} H(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} H(x) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ existerar ej!

(Varför?)

<u>Definition:</u> Oändligt gränsvärde, gränsvärde i oändligheten

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \bar{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \bar{y}$$

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\bar{x}} f(x) = -\infty$$

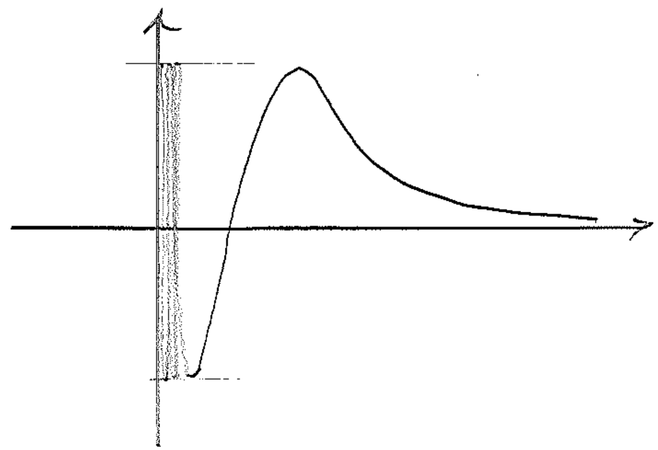
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = (\pm)\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = (\pm)\infty$$

$$\lim_{x\to\bar{x}+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\bar{x}-} f(x) = \pm\infty$$

Se boken!

<u>Exempel:</u>

$f(x) = \sin(1/x)$, $x > 0$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$\lim_{x\to 0+} f(x)$ existerar ej!

Sats: Egenskaper för gränsvärden

Om $\begin{cases} \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = \bar{y} \\ \lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x) = \bar{z} \end{cases}$

så gäller att

(i) $\lim\limits_{x\to\bar{x}} [f(x)+g(x)] = \bar{y}+\bar{z}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\bar{x}} [f(x)-g(x)] = \bar{y}-\bar{z}$

(iii) $\lim\limits_{x\to\bar{x}} [\alpha f(x)] = \alpha\bar{y}$

(iv) $\lim\limits_{x\to\bar{x}} [f(x)g(x)] = \bar{y}\bar{z}$

(v) $\lim\limits_{x\to\bar{x}} [f(x)/g(x)] = \bar{y}/\bar{z}$

$(\bar{z}\neq 0)$

Bevis: (av (i))

Enligt definition:

$$\begin{cases} \exists\, \delta_f = \delta_f(\varepsilon) : 0<|x-\bar{x}|<\delta_f \Rightarrow |f(x)-\bar{y}|<\varepsilon \\ \exists\, \delta_g = \delta_g(\varepsilon) : 0<|x-\bar{x}|<\delta_g \Rightarrow |g(x)-\bar{z}|<\varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f(x)+g(x)-(\bar{y}+\bar{z})|$$

$$= |f(x)-\bar{y}+g(x)-\bar{z}|$$

triangelolikheten

$$\leq |f(x)-\bar{y}| + |g(x)-\bar{z}|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

om $|x-\bar{x}|<\delta_f(\varepsilon/2)$ och

$|x-\bar{x}|<\delta_g(\varepsilon/2)$, dvs

$$|x-\bar{x}|<\delta = \min(\delta_f(\varepsilon/2), \delta_g(\varepsilon/2)).$$

$\blacksquare$

3.2 Kontinuitet

Definition: Kontinuitet i en punkt

f kontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

(dvs om $\bar{y} = f(\bar{x})$)

Definition: Kontinuitet

f kontinuerlig om kontinuerlig i alla $x \in D(f)$

Notera:

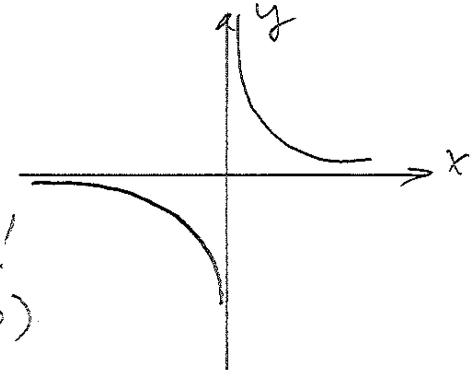
För en kontinuerlig funktion gäller alltså att

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) = f\left(\lim_{x \to \bar{x}} x\right)$$

"lim kan flyttas in i parentesen"

Exempel:

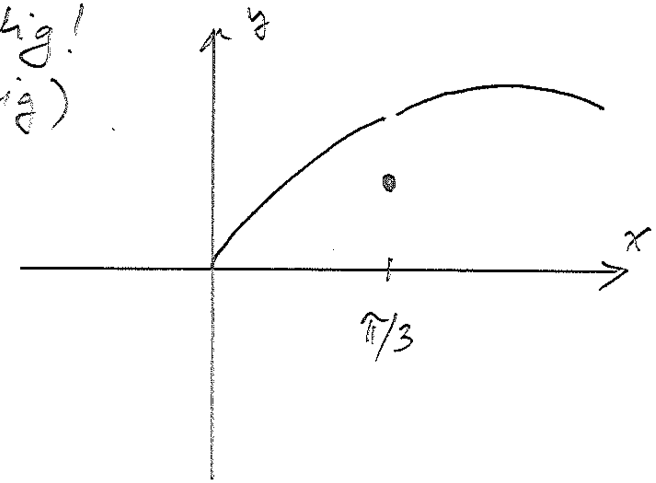
1) $f(x) = 1/x$



Kontinuerlig!
(Men ej i $x = 0$)

2)
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x < \pi/3 \\ 1/2, & x = \pi/3 \\ \sin(x), & x > \pi/3 \end{cases}$$

Ej kontinuerlig!
(diskontinuerlig)



Definition: Ensidig kontinuitet

f högerkontinuerlig i $\bar{x} \in D(f)$ om

$$\lim_{x \to \bar{x}+} f(x) = f(\bar{x})$$

Sats: Egenskaper för kontinuerliga funktioner

Om f och g är kontinuerliga så är också följande funktioner kontinuerliga:

(i) $f+g$

(ii) $f-g$

(iii) αf

(iv) fg

(v) f/g

(vi) $f \circ g$

Bevis:

(i)
$$\lim_{x \to \bar{x}} (f+g)(x) = \lim_{x \to \bar{x}} [f(x) + g(x)]$$
$$= \lim_{x \to \bar{x}} f(x) + \lim_{x \to \bar{x}} g(x)$$
$$= f(\bar{x}) + g(\bar{x}) = (f+g)(\bar{x})$$

(vi)
$$\lim_{x \to \bar{x}} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to \bar{x}} f(g(x))$$
$$= f\left(\lim_{x \to \bar{x}} g(x)\right) = f(g(\bar{x}))$$
$$= (f \circ g)(\bar{x}) \quad \blacksquare$$

Notera:

1) Alla ändliga algebraiska uttryck och sammansättningar av de elementära funktionerna.

2) $f = 1 - H$, $g = H \Rightarrow f + g = 1$, kontinuerlig!