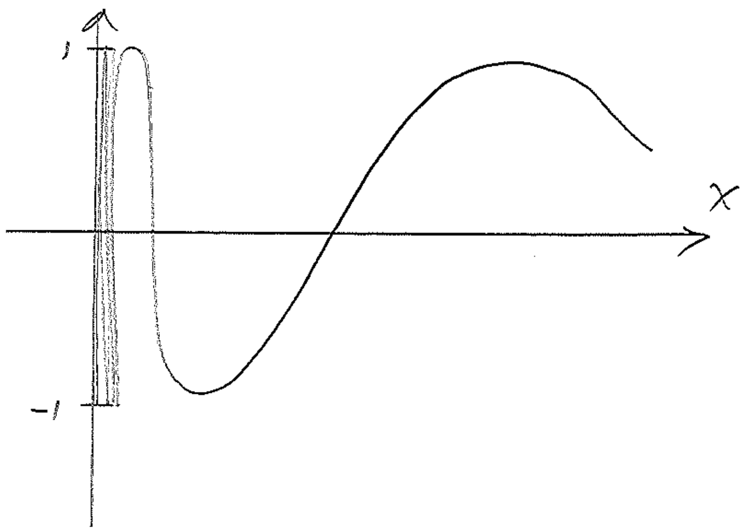
* **Idag:**
- Likformig kontinuitet (AL 3.3)
- Lipschitz-kontinuitet (AL 3.4)

$\boxed{F08}$

3.3 Likformig kontinuitet

Exempel:

$$f(x) = \sin(1/x)$$



- Kontinuerlig på $(0,\infty)$ (och på $(-\infty,0)$)
- Kontinuitet:

$$\text{litet } \underbrace{|\Delta x|}_{<\delta} \Rightarrow \text{litet } \underbrace{|\Delta y|}_{<\varepsilon} \quad ?$$

- **Men:** För litet $\bar{x}$ gäller för $f(x) = \sin(1/x)$ att

$$\text{litet } |\Delta x| \Rightarrow |\Delta y| \approx 2$$

inte litet!

Funktionen är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig!

Kontinuitet: $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x})$

Likformig kontinuitet: $\underline{\delta = \delta(\varepsilon)}$

Oberoende av $\bar{x}$!

Definition: Likformig kontinuitet

f likformigt kontinuerlig på I om

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in I:$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Ett starkare krav än kontinuitet!

Sats: f likformigt kontinuerlig på I

$\Rightarrow f$ kontinuerlig på I

Exempel:

1) $f(x) = 3x + 5, \quad I = \mathbb{R}$

2) $g(x) = x^2, \quad I = \mathbb{R}$

f och g är kontinuerliga

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) = 3\bar{x} + 5 = \bar{y} \\ \lim_{x \to \bar{x}} g(x) = g(\bar{x}) = \bar{x}^2 = \bar{z} \end{cases}$$

1) $|f(x) - \bar{y}| = |3x + \cancel{5} - (3\bar{x} + \cancel{5})|$

$= |3(x - \bar{x})| = 3|x - \bar{x}| < \varepsilon$

om $|x - \bar{x}| < \delta = \varepsilon/3$

$\therefore \delta = \varepsilon/3$ oberoende av $\bar{x}$

$\Rightarrow f$ likformigt kontinuerlig

2) $|g(x) - \bar{z}| = |x^2 - \bar{x}^2| = |x + \bar{x}| \cdot |x - \bar{x}|$

$\leq (|x| + |\bar{x}|) \cdot |x - \bar{x}|$

$\leq \{\text{Tag } \delta \leq 1\}$

$\leq (2|\bar{x}| + 1) \cdot |x - \bar{x}| < \varepsilon$

$$|x| = |x - \bar{x} + \bar{x}| \leq \underbrace{|x - \bar{x}|}_{< \delta \leq 1} + |\bar{x}| < 1 + |\bar{x}|$$

om $|x - \bar{x}| < \dfrac{\varepsilon}{2|\bar{x}| + 1}$

$\therefore \delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2|\bar{x}| + 1}\right)$

Ej likf. kontinuerlig, δ beror av $\bar{x}$

Notera! Detta visar inte att g inte är likformigt kontinuerlig

Varför?

Definition: Begränsning

f uppåt begränsad på I om

$$\exists \overline{M}_f \; \forall x \in I : f(x) \leq \overline{M}_f$$

f nedåt begränsad på I om

$$\exists \underline{M}_f \; \forall x \in I : f(x) \geq \underline{M}_f$$

f begränsad på I om uppåt <u>och</u> nedåt begränsad, dvs

$$\exists M_f \; \forall x \in I : |f(x)| \leq M_f$$

Sats: Egenskaper för likformigt kontinuerliga funktioner

f, g likformigt kontinuerliga = LK

$\Longrightarrow$

(i) $f+g$ LK

(ii) $f-g$ LK

(iii) αf LK

(iv) fg LK <u>om f, g begränsade</u>

(v) f/g LK om f, g begränsade och $|g(x)| \geq \beta > 0$ på I

(vi) $f \circ g$ LK

Jämför med tidigare exempel,
$f(x) = g(x) = x$
$\Rightarrow (fg)(x) = x^2$

3.4 Lipschitz-kontinuitet

Likformig kontinuitet:

$|\Delta x|$ litet $\Rightarrow |\Delta y|$ litet

Lipschitz kontinuitet:

$|\Delta x|$ litet $\Rightarrow |\Delta y|$ litet

$$|\Delta y| \leq L_f \cdot |\Delta x|$$

Notera:

$$L_f \cdot |\Delta x| < \varepsilon$$

om $|\Delta x| < \varepsilon / L_f$,

dvs $\boxed{\delta(\varepsilon) = \varepsilon / L_f}$

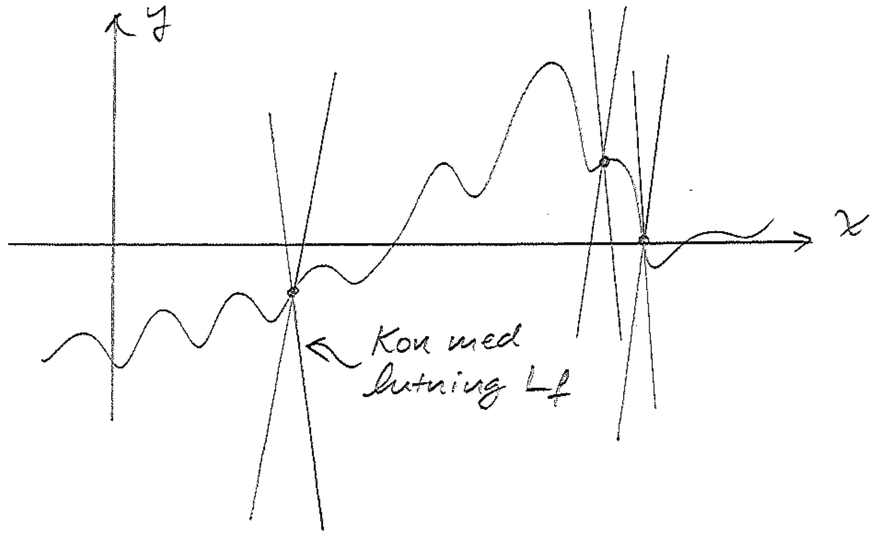
Ett kvantitativt mått på (likformig) kontinuitet!

Definition: Lipschitz-kontinuitet

f Lipschitz-kontinuerlig på I om

$\exists\, L_f > 0 \ \forall x_1, x_2 \in I$

$$\underbrace{|f(x_1) - f(x_2)|}_{\Delta y} \leq L_f \cdot |\underbrace{x_1 - x_2}_{\Delta x}|$$



f ligger utanför varje kon med lutning L_f centrerad i $(x, f(x))$

Sats: Lipschitz medför likf. kont.

Bevis:

Vill visa att

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in I$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Tag $\delta = \varepsilon / L_f$, $|x_1 - x_2| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f \cdot |x_1 - x_2|$$

$$< \cancel{L_f} \cdot \varepsilon / \cancel{L_f}$$

$$= \varepsilon .$$

$\therefore$ Likformigt kontinuerlig.

Exempel: $f(x) = x^2$, $I = [2,3]$

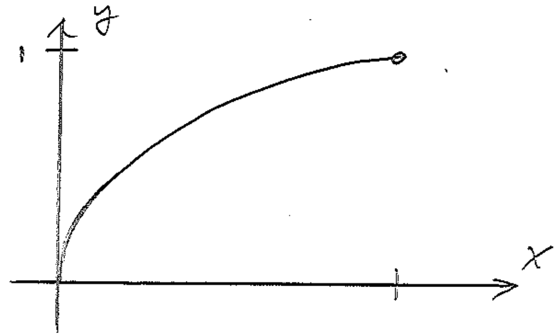
$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2|$$

$$= |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\leq (3+3) \cdot |x_1 - x_2|$$

$$= 6 \cdot |x_1 - x_2| \quad \therefore \underline{\underline{L_f = 6}}$$

Exempel: $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0,1]$



1) Likformig kontinuitet

$$|f(x_1) - f(x_2)|^2 = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|^2$$

$$= |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \cdot |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$$

omvända triangelolikheten

$$\leq |\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}| \cdot |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$$

$$= |x_1 - x_2|$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} < \varepsilon$$

om $|x_1 - x_2| < \varepsilon^2$

$$\therefore \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$$

$\Rightarrow \sqrt{x}$ likformigt kontinuerlig

2) Lipschitz-kontinuitet

Om Lipschitz-kontinuerlig:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq L_f \cdot |x_1-x_2|$$

$$\Rightarrow L_f \geq \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}, \quad x_1 \neq x_2$$

$$= \frac{|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|}{|x_1-x_2|}$$

$$= \frac{\cancel{|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|}}{|\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}|\cdot\cancel{|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \to \infty \text{ då } x_1, x_2 \to 0$$

$\therefore$ Ej Lipschitz-kontinuerlig

Tumregler:

- Lipschitz-kontinuerlig om begränsad derivata $(|\Delta y/\Delta x|)$ — $|\Delta y| \leq L_f \cdot |\Delta x|$
- Likformig kontinuerlig om begränsad på begränsat intervall och ej oscillerar, eller begränsad derivata

Sats: Egenskaper för Lipschitz-kontinuerliga funktioner

f, g Lipschitz-kontinuerliga med konstanter L_f, L_g

(i) $f+g$ $\quad L = L_f + L_g$

(ii) $f-g$ $\quad L = L_f \pm L_g$

(iii) αf $\quad L = \alpha L_f$

(iv) fg $\quad L = L_f M_g + M_f L_g$ — Jämför med derivata av produkt...

(v) f/g $\quad L = \dfrac{L_f M_g + M_f L_g}{\beta^2}$ — $|g(x)| \geq \beta > 0$

(vi) $f \circ g$ $\quad L = L_f L_g$

Bevis:

(iv)

$$|(fg)(x_1)-(fg)(x_2)| = |f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|$$

lägg till och dra ifrån

$$= |f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_1)+f(x_2)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|$$

triangelolikheten

$$\leq |f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_1)| + |f(x_2)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|$$

$$= |f(x_1) - f(x_2)| \cdot |g(x_1)|$$
$$+ |f(x_2)| \cdot |g(x_1) - g(x_2)|$$
$$\leq L_f \cdot M_g \cdot |x_1 - x_2|$$
$$+ M_f \cdot L_g \cdot |x_1 - x_2|$$
$$= \underbrace{(L_f M_g + M_f L_g)}_{= L_{fg}} \cdot |x_1 - x_2| .$$

$\blacksquare$

<u>Notera:</u>

f Lipschitz med $L_f = A$

$\Rightarrow f$ Lipschitz med $L_f = 2A$

L_f är <u>en</u> konstant, inte nödv. den bästa!

<u>Exempel:</u> $f(x) = \underbrace{3x^3}_{f_1} + \underbrace{7x}_{f_2}, \quad I = [3,5]$

$$f_1(x) = 3x^3$$
$$f_2(x) = 7x$$

$$|f_1(x_1) - f(x_2)| = |3x_1^3 - 3x_2^3|$$
$$= 3 \cdot |x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2| \cdot |x_1 - x_2|$$
$$\leq 3 \cdot (25 + 25 + 25) \cdot |x_1 - x_2|$$
$$= \underbrace{225}_{= L_{f_1}} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$|f_2(x_1) - f_2(x_2)| = |7x_1 - 7x_2|$$
$$= \underbrace{7}_{= L_{f_2}} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\therefore \quad L_f = 225 + 7 = \underline{\underline{232}}$$