* **Idag:** $\boxed{\text{F10}}$

- Derivatans definition (4.1)
- Elementära funktionernas derivator (4.2)
- Deriveringsregler (4.3)

• 4.1 Derivatans definition

Derivata = hur ändras funktionsvärdet $y = f(x)$ vid en ändring av argumentet x

$$x \longmapsto x + \Delta x$$

$$y \longmapsto y + \Delta y$$

$$\xrightarrow{\Delta x} \boxed{\; f' \;} \xrightarrow{\Delta y}$$

Enkelt samband för ett linjärt polynom $f(x) = kx + m$:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= \underbrace{(k(x + \Delta x) + m)}_{f(x+\Delta x)} - \underbrace{(kx + m)}_{f(x)} \\
&= \cancel{kx} + k\Delta x + \cancel{m} - \cancel{kx} - \cancel{m} \\
&= k\Delta x
\end{aligned}$$

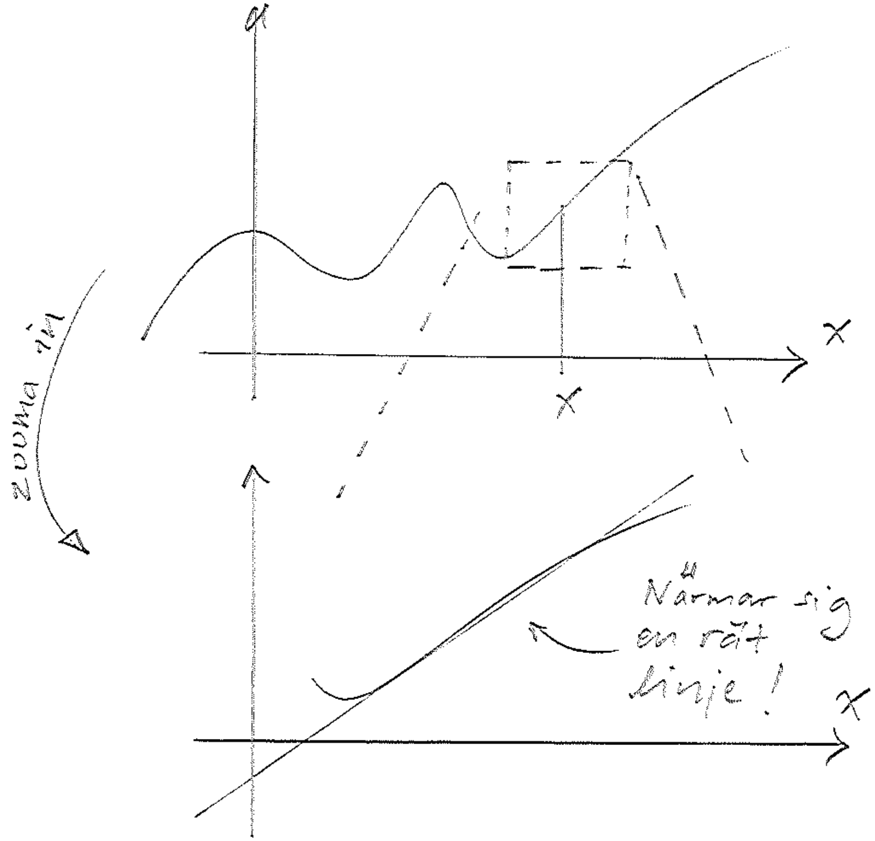
$$\therefore \quad \boxed{\Delta y = k \cdot \Delta x}$$

Sambandet är linjärt
= proportionellt och konstanten
= derivatan = lutningen.

Notera:

$$(*) \quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

– Vad händer om f ej är ett linjärt polynom?



$\therefore$ Differenskvoten $(*)$ ger sambandet mellan Δy och Δx om Δx är litet.

Definition: Derivata

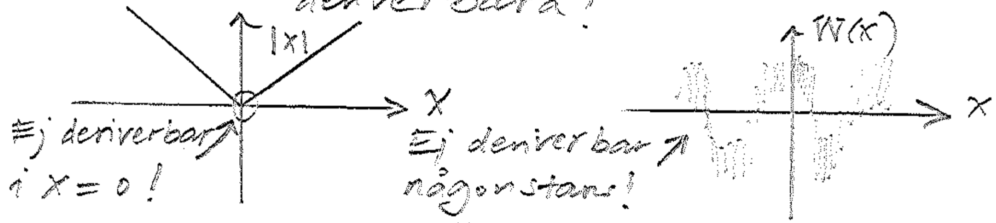
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har derivatan $f'(x)$ i punkten x om gränsvärdet

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar. Då är f <u>deriverbar</u> i punkten x.

Notera: 1) deriverbar = närma sig en rät linje

2) inte alla funktioner är deriverbara!



Notation:

$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = Df$$

$$f \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow f'$$

deriverings-
operatorn

Exempel: $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}$$

$$= 2x + h \longrightarrow 2x \text{ då } h \to 0.$$

$$\therefore \quad D(x^2) = 2x.$$

Sats: Deriverbarhet $\Rightarrow$ kontinuitet

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriverbar i x

$\Rightarrow f$ kontinuerlig i x.

Bevis:

$$f(x+h) = \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\to f'(x) \text{ då } h \to 0} \cdot h + f(x)$$

$\to 0$ då $h \to 0$

$$\to f'(x) \cdot 0 + f(x) = f(x)$$

då $h \to 0$.

$$\therefore \underbrace{\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).}_{\text{Definitionen av kontinuitet}}$$

■

Högre ordningens derivator

$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \longrightarrow \dots$$

$$f^{(0)} \xrightarrow{D} f^{(1)} \xrightarrow{D} f^{(2)} \xrightarrow{D} f^{(3)} \longrightarrow \dots \longrightarrow f^{(n)}$$

$$f \xrightarrow{D} Df \xrightarrow{D} D^2 f \xrightarrow{D} D^3 f \longrightarrow \dots \longrightarrow D^n f$$

• 4.2 De elementära funktionernas derivator

Sats: De elementära funktionernas derivator

	$f(x)$	$f'(x)$	$D(f')$
	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+$
(*)	$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
	$\ln(x)$	$1/x$	$\mathbb{R}_+$
(**)	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
	$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+\pi n\}$, $n\in\mathbb{Z}$
	$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1,1)$
	$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$(-1,1)$
	$\arctan(x)$	$1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$

Bevis:

(*)
$$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \frac{\exp(x)\cdot\exp(h)-\exp(x)}{h} = \exp(x)\cdot\underbrace{\frac{\exp(h)-1}{h}}_{\to 1 \text{ då } h\to 0} \to \exp(x) \text{ då } h\to 0.$$

Ty:

Låt $y = \exp(h)-1$

$\Leftrightarrow h = \ln(1+y)$

$$\Rightarrow \frac{\exp(h)-1}{h} = \frac{y}{\ln(1+y)} \to 1 \text{ då } y\to 0 \quad (h\to 0 \Leftrightarrow y \to 0)$$

(Standardgränsvärde från kap 3.)

(**)
$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\cdot\sin(h)-\sin(x)}{h}$$

$$= \cos(x) \cdot \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\substack{\to 1 \\ \text{då } h \to 0}} + \sin(x) \cdot \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\substack{\to 0 \\ \text{då } h \to 0}}$$

$\to$ $\underline{\cos(x)}$ då $h \to 0$

förläng med konjugatet

<u>Ty:</u>

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\cos^2(h)-1}{h\cdot(\cos(h)+1)} =$$

$$= \frac{\sin^2(h)}{h} \cdot \frac{1}{\cos(h)+1}$$

$$= \underbrace{h}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(h)+1}}_{\to 1/2} \to \underbrace{0 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2}}_{=0}.$$

$\blacksquare$

• 4.3 Deriveringsregler

<u>Sats:</u> Derivata av summa

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

<u>Bevis:</u>

$$\frac{(\alpha f + \beta g)(x+h) - (\alpha f + \beta g)(x+h)}{h} =$$

$$= \alpha \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} + \beta \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}$$

$\to \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ då $h \to 0$

ty f, g deriverbara. $\blacksquare$

<u>Notera:</u> D är <u>linjär</u>

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$$

(definitionen av linjäritet!)

Sats: Derivata av produkt (Leibniz regel)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Bevis:

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) \underbrace{- f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}_{=0 \text{ lägg till \& dra ifrån}} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x) \text{ ty}} + f(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)}$$

g deriverbar och därmed kontinuerlig

$$\to f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \blacksquare$$

Sats: Derivata av kvot

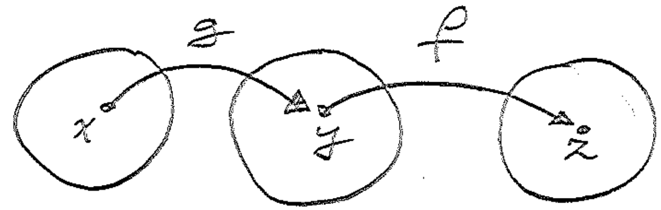
$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Bevis: Se boken!

Sats: Derivata av sammansatt funktion (kedjeregeln)

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{inre derivatan}}$$

Bevis:



$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\to f' \cdot g' \text{ då } \Delta x, \Delta y \to 0$$

Men: Vad händer om $\Delta y = 0$? Se boken! $\blacksquare$

Sats: Derivata av invers

Om f är deriverbar i x och f^{-1} är deriverbar i $y=f(x)$ gäller att

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Bevis:

$$f^{-1}(f(x)) = 1$$

Kedjeregeln ger

$$(f^{-1})'(\underbrace{f(x)}_{=y}) \cdot f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

(Notera att $f'(x) \neq 0$ ty annars skulle inte inversen vara deriverbar i $y=f(x)$.) $\blacksquare$

Exempel:

$$\begin{cases} f(x) = \exp(x) \\ f^{-1}(y) = \ln(y) \end{cases}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}$$

* **Implicit derivata:** Självstudie!