* Idag: $\boxed{\text{F11}}$

- Extremvärden (4.4)
- Medelvärdessatsen (4.5)

• 4.4 Extremvärden

Vi inleder med några grundläggande definitioner.

Definition: Globalt maximum/minimum

$\bar{x} \in D(f)$ globalt maximum om

$$\forall x \in D(f) : f(\bar{x}) \geq f(x)$$

(Globalt minimum på motsvarande sätt)

strängt max om sträng olikhet

Definition: Lokalt maximum/minimum

$\bar{x} \in D(f)$ lokalt maximum om

$$\exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \underbrace{(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)}_{\text{omgivning till } \bar{x}} : f(\bar{x}) \geq f(x)$$

(Lokalt minimum på motsvarande sätt)

strängt max om sträng olikhet

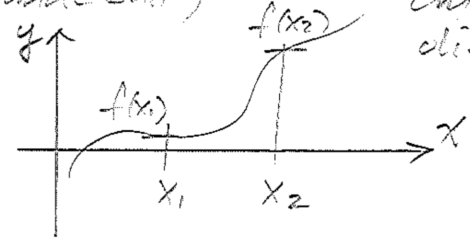
Definition: Växande/avtagande

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ växande på I om

$$\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_1 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

(Avtagande på motsvarande sätt)

strängt växande om sträng olikhet



Definition: Konvex/konkav

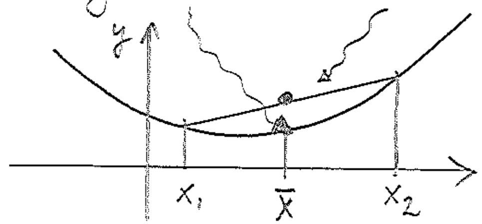
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex på I om

$$\forall \theta \in (0,1) \;\; \forall x_1, x_2 \in I :$$

(Konkav på motsvarande sätt)

strängt konvex om sträng olikhet

$$f(\underbrace{(1-\theta)x_1 + \theta x_2}_{\text{medelvärde av argument}}) \leq \underbrace{(1-\theta) f(x_1) + \theta f(x_2)}_{\text{medelvärde av funktionsvärden}}$$

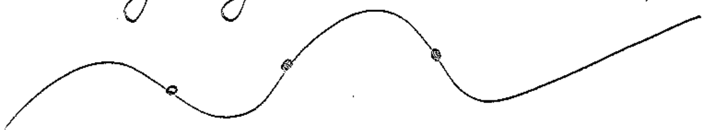


för $\theta = \frac{1}{2}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Definition: Inflexionspunkt

Övergång mellan konvex / konkav



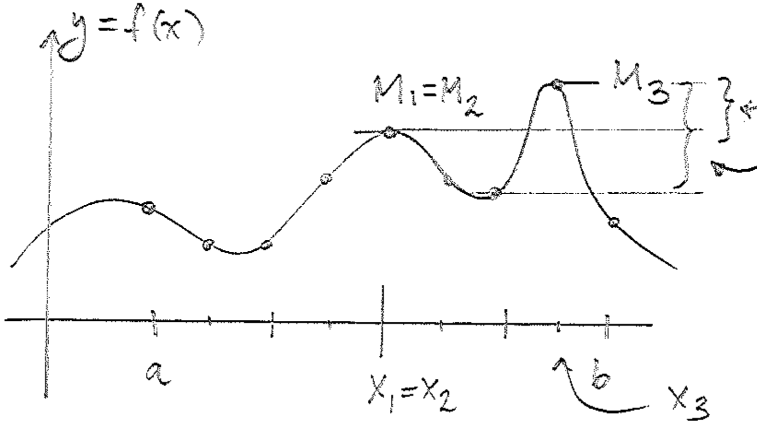
(Illustrera alla punkterna på tavlan!)

Mycket central sats!

Sats: Extremvärdessatsen

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på $[a, b]$ (slutet och begränsat) så antar f ett största och ett minsta värde på $[a, b]$.

Bevisskiss: (Se bok för bevis)



- Dela in $[a, b]$ i 2^k intervall av längd $h = 2^{-k} \cdot (b-a)$.
- Låt $M_k = f(x_k)$ = största nodvärdet
- Ger talföljd $M_1, M_2, M_3, \ldots$ där $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \ldots$
- Notera att

$$|M_{k+1} - M_k| = |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$
$$\leq |f(x_{k+1}) - f(x_{k+1} \pm h_{k+1})|$$
$$\leq L_f \, h_{k+1} = L_f \cdot \frac{(b-a)}{2^{k+1}}$$
$$\to 0 \text{ då } k \to \infty$$

$\Rightarrow (M_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-följd

Men: Kräver en lite mer noggrann analys; räcker inte att två intilliggande element M_k och M_{k+1} är nära, måste ha $|M_m - M_n| \to 0$.

(Vi kommer att genomföra ett liknande argument i kapitel 6; se boken för detaljer!)

$\underbrace{\text{kapitel 6}}$ ← Banachs fixpunktssats.

$(M_k)_{k=1}^{\infty}$ Cauchy-följd

$\Rightarrow \exists \overline{M} : M_k \to \overline{M} = \text{maximum}.$ ■

Notera:

1) Viktigt att $[a,b]$ är begränsat;
$f(x) = \exp(-x)$ har inget minsta värde på $[0,\infty)$

2) Viktigt att $[a,b]$ är slutet;
$f(x) = x$ har varken största eller minsta värde på $(0,1)$.

Sats: Inre lokala extrempunkter är stationära

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har ett (lokalt) extremvärde i en inre punkt $\bar{x} \in D(f)$ och f är deriverbar i $\bar{x}$ så är

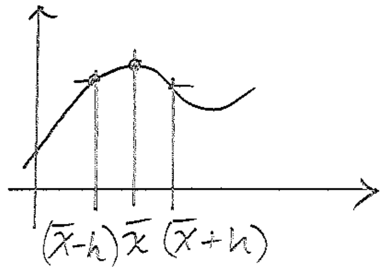
$$f'(\bar{x}) = 0.$$

← Def. stationär punkt

Bevis:

Om lokalt maximum i $\bar{x}$:

$$\begin{cases} \dfrac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \leq 0, & h > 0 \\[2ex] \dfrac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \geq 0, & h < 0 \end{cases}$$



Gränsvärdena då $h \to 0+$ och $h \to 0-$ existerar och sammanfaller ty deriverbar $\Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$. ■

Notera:

1) Viktigt att $\bar{x}$ är inre punkt;

$f(x)=x$ på $I=[0,1]$ har lokalt maximum i $\bar{x}=1$ men $f'(1)=1\neq 0$

2) Det omvända gäller inte;

$f(x)=x^3$ uppfyller att $f'(0)=0$ men $\bar{x}=0$ är ingen extrempunkt

* Recept för att lösa extremvärdesproblem:

1. Undersök stationära punkter, dvs $f'(x)=0$
2. Undersök singulära punkter, dvs $f'(x)$ ej definierad
3. Undersök ändpunkter

Exempel:

$$f(x)=\sin(\ln(x)) \text{ på } I=(0,1]$$

1) Stationära punkter

$$0=f'(x)=\cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}$$

$\Leftrightarrow \cos(\ln(x))=0$

$\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\exp\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right), \quad n\in\mathbb{Z}$

$x\in(0,1] \Rightarrow \underline{\underline{x=\exp\left(\frac{\pi}{2}-\pi n\right)}}, \quad n=1,2,\ldots$

(minima för udda n, maxima för jämna n)

2) Singulära punkter: saknas

3) Ändpunkter

$x=1$ lokalt maximum ty

$f'(1)=\cos(\ln(1))\cdot\frac{1}{1}=\cos(0)=1>0$

Men: $f(1)=0$

$\therefore$ Globala maxima och minima i punkterna $x=\exp\left(\frac{\pi}{2}-\pi n\right), n=1,2,\ldots$

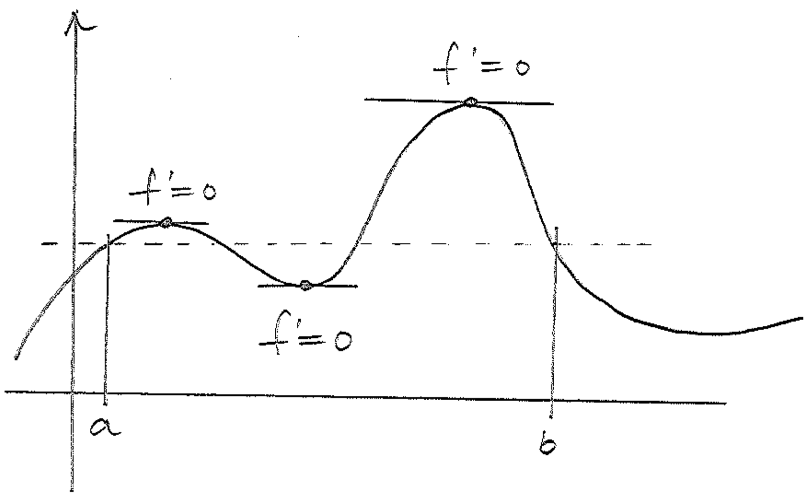
•4.5 Medelvärdessatsen

En av de mest centrala och mest användbara satserna inom den matematiska analysen!

Lemma: Rolles sats

f kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b) och $f(a)=f(b)$

$\Longrightarrow \exists\ \bar{x} \in (a,b) : f'(\bar{x}) = 0$



Bevis:

Om f = konstant är $f'=0$ på hela intervallet och satsen är klar, så vi kan anta att f ej är konstant.

f ej konstant

$\Longrightarrow \exists\ c \in (a,b) : f(c) \neq f(a) = f(b)$

Två möjligheter

1) $f(c) > f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow$ största värdet antas inte i en ändpunkt

$\Longrightarrow$ finns en inre extrempunkt $\bar{x}$

$\Longrightarrow$ $f'(\bar{x}) = 0$ (enligt extremvärdessatsen)

2) $f(c) < f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow$ minsta värdet antas inte i en ändpunkt

$\Longrightarrow$ finns en inre extrempunkt $\bar{x}$

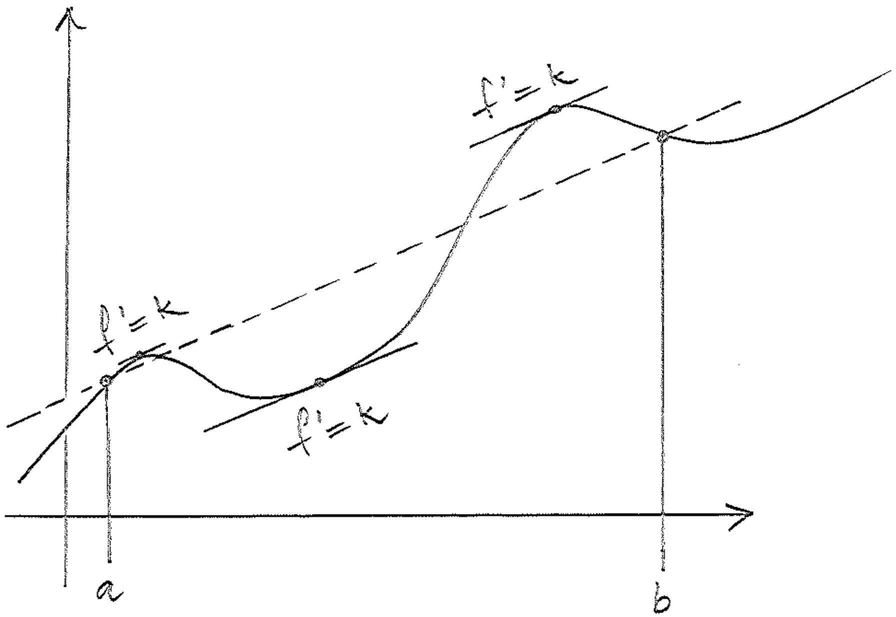
$\Longrightarrow$ $f'(\bar{x}) = 0$ ∎

Sats: Medelvärdessatsen

f kontinuerlig på $[a,b]$ och deriverbar på (a,b)

$$\Rightarrow \bar{x} \in (a,b) : f'(\bar{x}) = k$$

$$\underbrace{k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{medellutningen}}$$



Bevis:

Låt $g(x) = f(x) - k \cdot (x-a)$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(a) = f(a) \\ g(b) = f(a) - k \cdot (b-a) \\ \quad = f(a) - (f(b) - f(a)) \\ \quad = f(a) \end{cases}$$

Enligt Rolles sats:

$\exists \bar{x} \in (a,b)$:

$$0 = g'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - k$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(\bar{x}) = k \qquad \blacksquare$$

* **Tre versioner av medelvärdessatsen**

(I)

$$\boxed{f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

(Funktionen antar medellutningen i en punkt $\bar{x}$)

(II)

$$\boxed{f(b)-f(a) = f'(\bar{x})\cdot(b-a)}$$

(Skillnaden i funktionsvärden är produkten av derivatan i $\bar{x}$ och intervallängden)

(III)

$$\boxed{f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi)\cdot(x-\bar{x})}$$

(Mer om denna på nästa föreläsning!)

Sats: Beräkning av Lipschitz-konstant

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriverbar och $|f'|$ begränsad

$$\Rightarrow \quad L_f = \sup|f'|$$

minsta övre begränsningen

Bevis:

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\bar{x})\cdot(x_1-x_2)|$$

$$= |f'(\bar{x})|\cdot|x_1-x_2|$$

$$\leq \underbrace{\sup|f'|}_{=L_f}\cdot|x_1-x_2|$$

∎