* Idag: F12

- Linjärisering (4.6)
- Numerisk derivata (4.7)

Kom ihåg medelvärdessatsen från förra föreläsningen:

(I) $$f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(lös ut $f(b)-f(a)$)

(II) $$f(b)-f(a) = f'(\bar{x})\cdot(b-a)$$

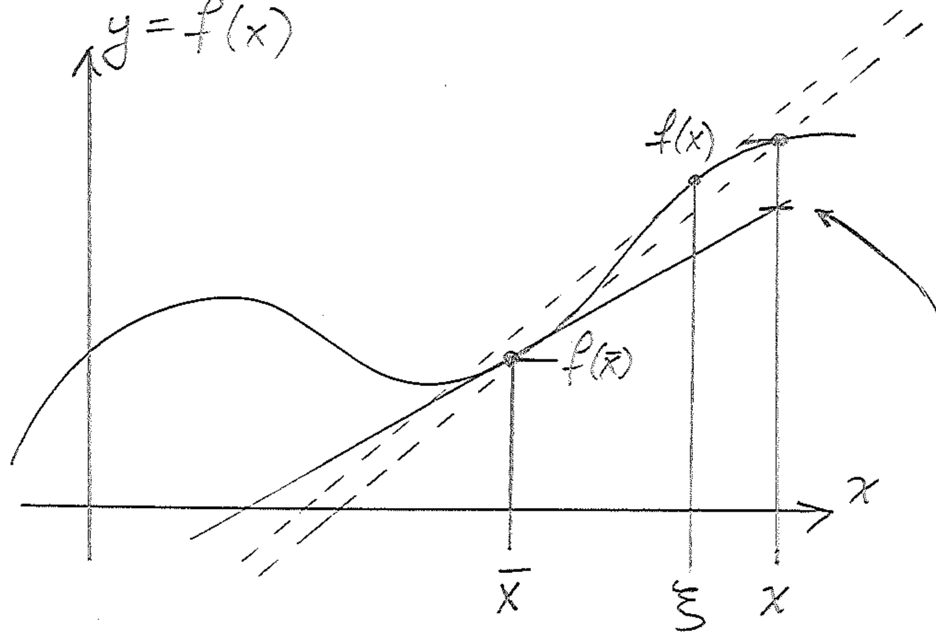
(lös ut $f(b)$)

(III) $$\boxed{f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi)\cdot(x-\bar{x})}$$

$$\begin{cases} a \to \bar{x} \\ b \to x \\ \bar{x} \to \xi \end{cases}$$

(ξ: grekiska bokstaven xi)

- 4.6 Linjärisering



En "okänd" punkt någonstans mellan $\bar{x}$ och x

Om $f'(\xi) \approx f'(\bar{x})$ kan vi ersätta ξ (okänd) med $\bar{x}$ (känd) och får

$$\boxed{f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\cdot(x-\bar{x})}$$

Uttrycket i högerledet kallas <u>linjäriseringen</u> av f i punkten $\bar{x}$.

<u>Definition:</u> Linjärisering

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriverbar i $\bar{x}$

Linjäriseringen av f runt punkten $\bar{x}$ ges av <u>funktionen</u>

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\cdot(x-\bar{x}).$$

<u>Notera:</u>

f deriverbar i $\bar{x}$

$\iff$

f närmar sig en rät linje nära $\bar{x}$

$\iff$

linjäriseringen är en <u>bra approximation</u>!

<u>Exempel:</u> Linjärisering av linjär funktion

$$f(x) = kx + m$$

$$\Rightarrow f'(x) = k$$

$$\Rightarrow f'(\bar{x}) = k$$

$$\Rightarrow L_{\bar{x}}[f](x) = \underbrace{(k\bar{x}+m)}_{=f(\bar{x})} + \underbrace{k}_{=f'(\bar{x})}\cdot(x-\bar{x})$$

$$= \cancel{k\bar{x}} + m + kx - \cancel{k\bar{x}}$$

$$= kx + m = f(x)$$

$\therefore$ Linjäriseringen är samma som funktionen själv! (som väntat)

<u>Exempel:</u> Linjärisering av $\sin(x)$ runt $\bar{x}=0$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow f'(\bar{x}) = \cos(0) = 1$$

$$\Rightarrow L_{\bar{x}}[f](x) = \underbrace{\sin(0)}_{=0} + 1\cdot(x-0) = x$$

$\therefore \sin(x) \approx x$ då $x \approx 0$ (Notera gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$)

Sats: Feluppskattning för linjärisering

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ två gånger deriverbar och f'' begränsad

$$\Rightarrow \quad |f(x) - L_{\bar{x}}[f](x)| \leq \frac{(x-\bar{x})^2}{2} \cdot \sup|f''|$$

Bevis: Se boken!

(Bygger på generaliserade medelvärdessatsen)

Exempel: Funktionsapproximation

Approximera $\sin(0.5)$ och ange approximationens noggrannhet

Notera först att $\frac{\pi}{6} \approx 0.5$

$$\sin(x) \approx L_{\frac{\pi}{6}}[\sin](x) \quad \text{då } x \approx \frac{\pi}{6}$$

$$L_{\frac{\pi}{6}}[\sin](x) = \sin(\pi/6) + \cos(\tfrac{\pi}{6}) \cdot (x - \tfrac{\pi}{6}) = 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (x - \pi/6)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(0.5) \approx 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (0.5 - \tfrac{\pi}{6}) \approx 0.47956$$

Felet:

$$\frac{(0.5 - \pi/6)^2}{2} \cdot \underbrace{\sup|f''|}_{\leq 1} \approx 0.00028$$

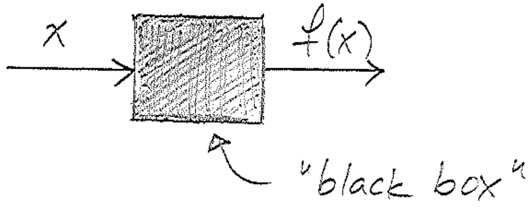
$$\Rightarrow \quad \sin(0.5) = \underline{0.47956 \pm 0.00028}$$

Korrekt värde: 0.47943 (ok!)

I nästa kapitel skall vi se hur vi kan göra approximationen ännu bättre genom att höja approximationsordningen!

- 4.7 Numerisk derivata

= Approximation av derivatan genom funktionsevaluering



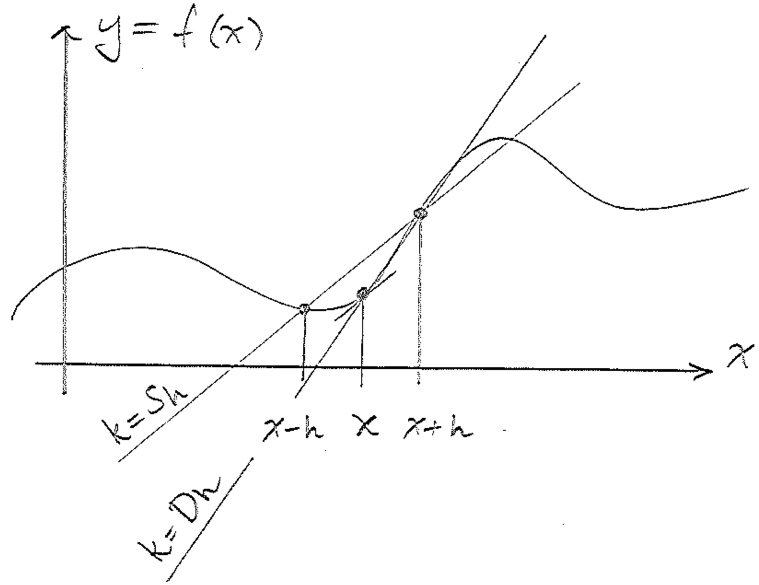
Definition: Ensidig numerisk derivata

$$D_h[f](x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

h = steglängd

Definition: Symmetrisk numerisk derivata

$$S_h[f](x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$



Sats: Feluppskattning för numerisk derivata

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ två ggr deriverbar och f'' begränsad

(i) $$|f'(x) - D_h[f](x)| \le \frac{|h|}{2} \sup |f''|$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tre ggr deriverbar och f''' begränsad

(ii) $$|f'(x) - S_h[f](x)| \le \frac{h^2}{6} \sup |f'''|$$

Bevis: (av (i))

$$|f'(x) - D_h[f](x)| = \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|$$

$$= h^{-1} \cdot |h f'(x) - f(x+h) + f(x)|$$

$$= h^{-1} \cdot | f(x+h) - (f(x) + h \cdot f'(x))|$$

$$= h^{-1} \cdot | f(x+h) - L_x[f](x+h)|$$

$$\leq h^{-1} \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \sup|f''| = \frac{|h|}{2} \sup |f''| \qquad \blacksquare$$

Notera:

1. D_h är en ~~första~~ första ordningens approximation, dvs

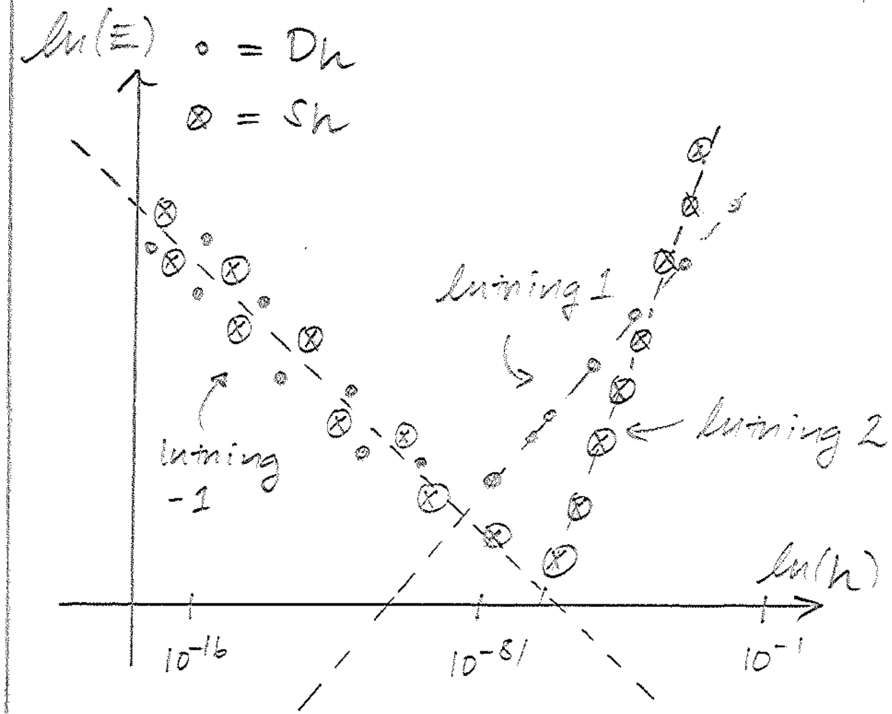
$$E \sim h$$

2. S_h är en andra ordningens approximation, dvs

$$E \sim h^2$$

* Optimal steglängd h

- Om h är för stort blir felet stort (enligt föregående sats)
- Om h är för litet blir felet stort (tg avrundningsfel)



Notera:

$$\begin{cases} E = C \cdot h^r \\ \Rightarrow \ln(E) = \ln(C) + r \ln(h) \\ \text{Rät linje med lutning } r = \underline{\text{konvergensordning}} \end{cases}$$

Flyttalsapproximation: något förenklat!

$$fl(D_h[f](x)) = \frac{f(x+h) \; fl(-) \; f(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \delta \cdot \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{|h|}$$

$$\approx D_h[f](x) + \underbrace{\delta \cdot \frac{2|f(x)|}{|h|}}_{\text{avrundningsfelet}}, \text{ där } |\delta| \le \varepsilon_{mach}$$

Totala approximationsfelet:

$$|f'(x) - fl(D_h[f](x))| = \quad \text{lägg till och dra ifrån}$$

$$= |f'(x) - D_h[f](x) + D_h[f](x) - fl(D_h[f](x))|$$

$$\overset{\text{triangelolikheten}}{\le} |f'(x) - D_h[f](x)| + |D_h[f](x) - fl(D_h[f](x))|$$

$$\le \underbrace{\frac{|h|}{2} \sup|f''|}_{\text{diskretiseringsfelet}} + \underbrace{\frac{2|f(x)|}{|h|} \cdot \varepsilon_{mach}}_{\text{avrundningsfelet}}$$

Notera: Går mot ∞ då $h \to 0$ eller $|h| \to \infty$

$\Rightarrow$ Finns optimum!

Låt $g(h) = Ah + \frac{B}{h}$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}\sup|f''| \\ B = 2|f(x)| \cdot \varepsilon_{mach} \end{cases}$$

$$0 = g'(h) = A - \frac{B}{h^2}$$

$$\Rightarrow h = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{4|f(x)|}{\sup|f''|}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon_{mach}^{1/2}}}$$

$\therefore$ Optimal steglängd för D_h är

$$h_1 \sim \varepsilon_{mach}^{1/2} \approx \underline{\underline{10^{-8}}}$$

På samma sätt får vi att optimal steglängd för S_h är

$$h_2 \sim \varepsilon_{mach}^{1/3} \approx \underline{\underline{10^{-5}}}$$