* **Idag:** $\boxed{\text{F13}}$

- Taylorpolynom (5.1)
- Beräkning av gränsvärden (5.2)

5.1 Taylorpolynom

Vi har tidigare sett hur funktioner kan approximeras med sin linjärisering:

$$f(x) \approx L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

Notera:

$$\begin{cases} L_{\bar{x}}[f](\bar{x}) = f(\bar{x}) \\ L'_{\bar{x}}[f](\bar{x}) = f'(\bar{x}) \end{cases}$$

Linjäriseringen är det unika förstagradspolynomet vars funktionsvärde och derivata sammanfaller med f i punkten $\bar{x}$!

Kan detta generaliseras till andragradspolynom?

Svar: Ja!

Låt $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C$

och sätt

$$\begin{cases} P_2(\bar{x}) = f(\bar{x}) \\ P_2'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \\ P_2''(\bar{x}) = f''(\bar{x}) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} A\bar{x}^2 + B\bar{x} + C = f(\bar{x}) \\ 2A\bar{x} + B = f'(\bar{x}) \\ 2A = f''(\bar{x}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_2(\bar{x}) = \underbrace{f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})}_{\text{Linjäriseringen!}} + \tfrac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2}$$

$P_1 = L_f$ = första ordningens Taylorpolynom

P_2 = andra ordningens Taylorpolynom

<u>Definition:</u> Taylorpolynom

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n gånger deriverbar i $\bar{x}$

$$P_n[f, \bar{x}](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})^k$$

$$\begin{cases} k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 2 \cdot 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

<u>Sats:</u> Taylorpolynomets derivator

$$(D^k P_n[f, \bar{x}])(\bar{x}) = (D^k f)(\bar{x})$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$

<u>Bevis:</u> Betrakta fallet $n = 3$;
se boken för det generella fallet!

$$\begin{cases} P_3 = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{6} f'''(\bar{x})(x-\bar{x})^3 \\ P_3' = f'(\bar{x}) + f''(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f'''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 \\ P_3'' = f''(\bar{x}) + f'''(\bar{x})(x - \bar{x}) \\ P_3''' = f'''(\bar{x}) \end{cases}$$

$$(P_3'''' = 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_3(\bar{x}) = f(\bar{x}) \\ P_3'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \\ P_3''(\bar{x}) = f''(\bar{x}) \\ P_3'''(\bar{x}) = f'''(\bar{x}) \end{cases}$$

$\blacksquare$

<u>Definition:</u> Maclaurinpolynom

= Taylorpolynom med $\bar{x} = 0$, dvs

$$Q_n[f](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot x^k$$

Exempel: Maclaurinpolynom för sin

$f(x) = \sin(x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$ $\quad f'''(0) = -1$

$f''''(x) = \sin(x)$ $\quad f''''(0) = 0$

$\vdots \qquad \vdots$

$Q_0 = 0$

$Q_1 = 0 + 1 \cdot x = x$

$Q_2 = Q_1$

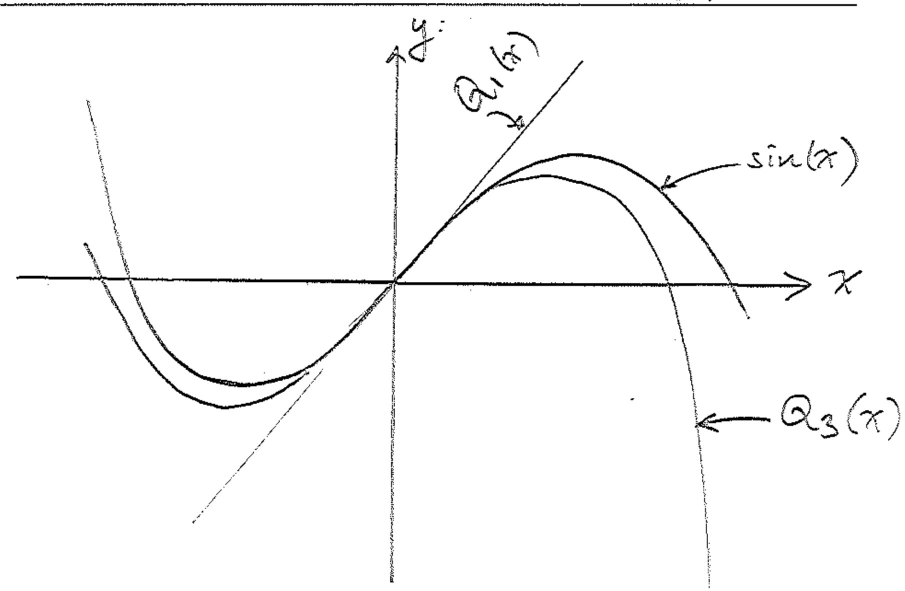
$Q_3 = x + \frac{1}{3!}(-1) \cdot x^3 = x - x^3/6$

$Q_4 = Q_3$

$Q_5 = x - x^3/3! + x^5/5!$

$\vdots$

$$Q_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$



Notera:

- Bättre approximation ju mindre $|x - \bar{x}|$ är
- Bättre approximation ju större n är

Sats: Taylors sats

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ gånger kontinuerligt deriverbar

$$\Rightarrow \quad f(x) = \underbrace{P_n[f, \bar{x}](x)}_{\text{Taylorpolynom}} + \underbrace{E_n[f, \bar{x}](x)}_{\text{Restterm}}$$

$$E_n[f, \bar{x}](x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \bar{x})^{n+1}$$

ξ: punkt mellan $\bar{x}$ och x

Notera:

- Resttermen = den term vi skulle lagt till för att få P_{n+1} (men med "okänd" punkt ξ istället för $\bar{x}$)
- $n=0$ ger:

$$f(x) = \underbrace{f(\bar{x})}_{P_0} + \underbrace{f'(\xi)\cdot(x-\bar{x})}_{E_0}$$

Medelvärdessatsen!

• 5.2 Beräkning av gränsvärden

Taylorpolynom har många användningsområden. Ett sådant är beräkning av gränsvärden.

Viktigt hjälpmedel: "Ordo-notation"

Definition: Ordonotation, $f = \mathcal{O}(h)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är ordo $h(x)$ nära $\bar{x}$ om

$$|f(x)| \lesssim |h(x)| \quad \text{i närheten av } \bar{x}$$

Notera: $A(x) \lesssim B(x)$ betyder

$$\exists\, C > 0 \;:\; A(x) \leq C \cdot B(x)$$

Sats: Räkneregler för ordo

$$f_1 = \mathcal{O}(h_1) \qquad f_2 = \mathcal{O}(h_2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f_1 \pm f_2 = \mathcal{O}(h_1 + h_2) \\ f_1 f_2 = \mathcal{O}(h_1 h_2) \\ \alpha f_1 = \mathcal{O}(h_1) \end{cases}$$

$$f(x) = \mathcal{O}((x-\bar{x})^p h(x))$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{(x-\bar{x})^p} = \mathcal{O}(h(x))$$

Exempel: Ordo-notation

$$\begin{cases} \sin(x) = \underbrace{x}_{\leftarrow Q_1} + O(x^3) \\ \sin(x) = \underbrace{x - x^3/6}_{Q_3} + O(x^5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exp(x) = 1 + x + O(x^2) \\ \exp(x) = 1 + x + x^2/2 + O(x^3) \\ \exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + O(x^4) \end{cases}$$

Exempel: Beräkning av gränsvärden

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\exp(x))^3}{\sin(3x) - 3\sin(x)}$$

$$1 - \exp(x) = 1 - (1 + x + O(x^2)) = -x + O(x^2)$$

$$\Rightarrow (1-\exp(x))^3 = \underbrace{-x^3 + O(x^4)}_{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\sin(3x) - 3\sin(x)$$

$$= (3x) - (3x)^3/6 + O(x^5) - 3(x - x^3/6 + O(x^5))$$

$$= \cancel{3x} - \frac{27}{6}x^3 - \cancel{3x} + \frac{3}{6}x^3 + O(x^5)$$

$$= -\frac{24}{6}x^3 + O(x^5) = -4x^3 + O(x^5)$$

$$\Rightarrow \frac{(1-\exp(x))^3}{\sin(3x) - 3\sin(x)} = \frac{-x^3 + O(x^4)}{-4x^3 + O(x^5)}$$

$$= \frac{-1 + O(x)}{-4 + O(x^2)} \to \frac{-1}{-4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

då $x \to 0$.

Ett närliggande verktyg är L'Hôpitals regler:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + O((x-\bar{x})^2)}{g(\bar{x}) + g'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + O((x-\bar{x})^2)}$$

$$= \{\text{om } f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0\}$$

$$= \frac{f'(\bar{x}) + O(x - \bar{x})}{g'(\bar{x}) + O(x - \bar{x})} \to \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$$

då $x \to \bar{x}$

Sats: L'Hôpitals första regel

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{x\to\bar{x}} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Sats: L'Hôpitals andra regel

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{x\to\bar{x}} g(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Dessa båda regler funkar även för $\bar{x} = \pm\infty$!)

Exempel:

Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(3x)}{x^2 + 10x^4}$$

$$\begin{cases} f(x) = x\sin(3x) \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ g(x) = x^2 + 10x^4 \to 0 \text{ då } x \to 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = \sin(3x) + 3x\cos(3x) \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ g'(x) = 2x + 40x^3 \to 0 \text{ då } x \to 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x) = 3\cos(3x) + 3\cos(3x) - 9x\sin(3x) \to 6 \text{ då } x \to 0 \\ g''(x) = 2 + 120x^2 \to 2 \text{ då } x \to 0 \end{cases}$$

L'Hôpitals första regel (två gånger!) ger:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$

Se också exemplet i boken för beräkning av $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\exp(x))^3}{\sin(3x) - 3\sin(x)}$ med L'Hôpital; mycket lättare med ordo-notation!