* **Idag:** • Serier (5.3)

$\boxed{F14}$

Serie = "oändlig summa"

$1+2+3+4+5+\ldots = ?$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = ?$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots = ?$

När konvergerar en serie?

Definition: Serie

$(a_k)_{k=0}^{\infty}$ reell talföljd

Låt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \text{delsumma}$$

Då kallas talföljden $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ för en serie och dess värde ges (om serien är konvergent) av

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Exempel:

1) $$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1-1+1-1+\ldots$$

divergent ty delsummorna ges av

$1, 0, 1, 0, \ldots$

2) $$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

en geometrisk serie

konvergent ty delsummorna ges av

$$s_n = 2-2^{-n} \to \underline{\underline{2}} \text{ då } n\to\infty$$

3) $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^k}{2k+1} = 4\cdot\left(1-1/3+1/5-1/7+\ldots\right)$$

konvergent med värdet $\underline{\underline{\pi}}$!

Definition: Absolutkonvergent

$\sum_k a_k$ absolutkonvergent om

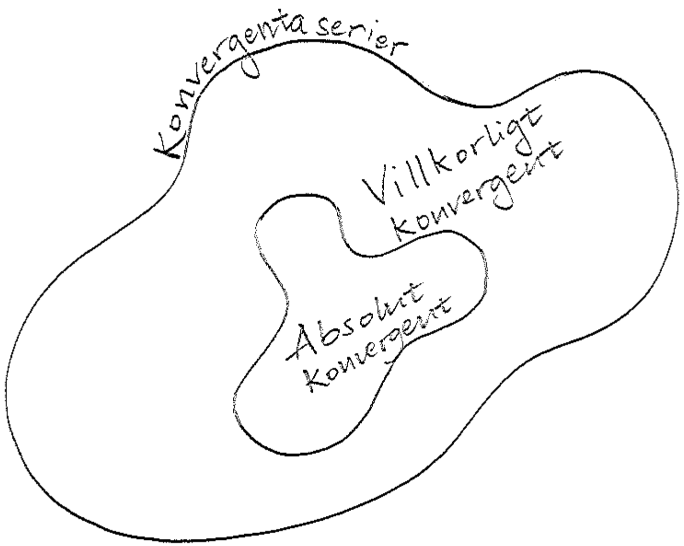
$\sum_k |a_k|$ är konvergent ← ett starkare villkor

Definition: Villkorligt konvergent

Konvergent men inte absolutkonvergent

Sats: Absolutkonvergens $\Rightarrow$ Konvergens

Bevis: Se boken!



* Att avgöra konvergens

- Kända serier (geometrisk, p-serie)
- Jämförelsetester

Lemma: Geometrisk summa

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a-1} = \frac{1-a^n}{1-a}, \quad a \neq 1$$

Bevis:

Multiplicera med $1-a \neq 0$ ger

$$\Leftrightarrow (1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1-a^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = 1-a^n$$

$$\Leftrightarrow 1+\cancel{a}+\cancel{a^2}+\ldots+\cancel{a^{n-1}} - (\cancel{a}+\cancel{a^2}+\ldots+a^n) = 1-a^n$$

$$\Leftrightarrow 1-a^n = 1-a^n \Leftrightarrow T \qquad \blacksquare$$

Sats: Geometrisk serie konvergent omm $|a|<1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad |a|<1$$

Bevis:

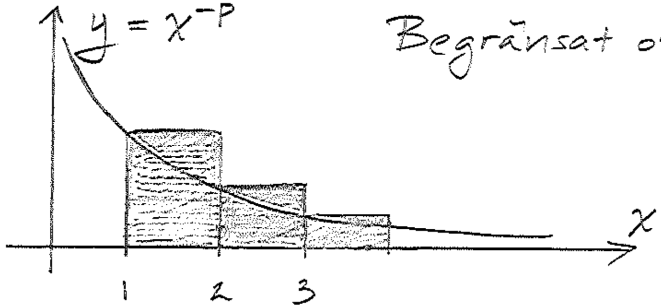
$$|a|<1 \Rightarrow \frac{1-a^n}{1-a} \to \frac{1}{1-a} \text{ då } n\to\infty \qquad \blacksquare$$

Sats: p-serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p} \text{ konvergent} \Leftrightarrow p > 1$$

Bevisskiss:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p} \sim \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{\infty}, & p \neq 1 \\ \left[\ln(x)\right]_1^{\infty} & p = 1 \end{cases}$$



Begränsat omm $p > 1$ ∎

Notera: Den harmoniska serien ($p=1$) är divergent

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots \longrightarrow \infty$$

* Vi skall nu presentera 5 st konvergenstester:

- Termtestet
- Jämförelsetest I
- Jämförelsetest II
- Kvottestet
- Alternerande testet

Sats: Termtestet

$$\sum_k a_k \text{ konvergent} \Rightarrow a_k \to 0$$

(används med modus tollens!)

Bevis:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

$$= s - s = 0$$

ty konvergent ∎

Exempel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+k}{3+k} \text{ ej konvergent ty}$$

$$a_k = \frac{2+k}{3+k} \longrightarrow \frac{2}{3} \neq 0$$

Sats: Jämförelsetest I

Om $\sum_k a_k$ och $\sum_k b_k$ (slutligt) positiva Obs!

och (slutligen) $\boxed{a_k \lesssim b_k}$

så gäller att

$$\begin{cases} \sum_k b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_k a_k \text{ konvergent} \\ \sum_k a_k \text{ divergent} \Rightarrow \sum_k b_k \text{ divergent} \end{cases}$$

(Bevis)

Exempel

Är $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{3k^2+4k+1}{5k^3+6k^4+2}}_{=a_k}$ konvergent?

Tag $b_k = k^{-2}$ (p-serie med $p=2$, konvergent)

$$a_k = \frac{3k^2+4k+1}{5k^3+6k^4+2} \overset{k\geq 1}{\leq} \frac{3k^2+4k^2+k^2}{6k^4} = \frac{8}{6}k^{-2}$$

$$\lesssim k^{-2} = b_k \quad \therefore \text{ konvergent}$$

Sats: Jämförelsetest II

Om $\sum_k a_k$ och $\sum_k b_k$ (slutligt) positiva Obs!

och

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$

så gäller att

$$\begin{cases} L < \infty \text{ och } \sum_k b_k \text{ konvergent} \\ \quad \Rightarrow \sum_k a_k \text{ konvergent} \\ L > 0 \text{ och } \sum b_k \text{ divergent} \\ \quad \Rightarrow \sum_k a_k \text{ divergent} \end{cases}$$

Notera: $L \in (0, \infty)$ ger

$$\sum_k a_k \text{ konvergent} \iff \sum_k b_k \text{ konvergent}$$

Exempel

Vi undersöker samma serie som innan

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{3k^2+4k+1}{5k^3+6k^4+2} \\ b_k = k^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_k}{b_k} = \frac{3k^2+4k+1}{5k^3+6k^4+2} \Big/ k^{-2} = \frac{3k^4+4k^3+k^2}{5k^3+6k^4+2}$$

$$= \frac{3+4k^{-1}+k^{-2}}{5k^{-1}+6+2k^{-4}} \to \frac{3}{6} \in (0,\infty)$$

då $k \to \infty$

$\therefore$ Serien är konvergent

($\frac{1}{k^2}$ p-serien med $p=2$ är konvergent)

Sats: Kvottestet

Om $\sum_k a_k$ (slutligt) positiv och
Obs!

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \rho$$

Så gäller att

$0 \le \rho < 1 \Rightarrow \sum_k a_k$ konvergent

$\rho = 1 \Rightarrow \sum_k a_k$ konvergent eller divergent

$\rho > 1 \Rightarrow \sum_k a_k$ divergent

Bevis: Se boken!

Exempel

Är $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 3^k}{k!}$ konvergent?

$$a_k = \frac{k^3 3^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^3 \cdot 3^{k+1} / (k+1)!}{k^3 \cdot 3^k / k!}$$

$$= 3 \underbrace{\left(\frac{k+1}{k}\right)^3}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{\to 0} \to \rho = 0$$

då $k \to \infty \Rightarrow$ konvergent

Sats: Alternerande testet

Om $\sum_k a_k$ (slutligt) uppfyller

(i) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

(ii) $a_k a_{k+1} < 0$ (alternerande)

(iii) $|a_{k+1}| \le |a_k|$

så är serien konvergent

(Bevis)

Exempel

Är $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)^k}{2k+1}$ konvergent?

Ja! Ty (i), (ii), (iii) uppfyllda

Men: $a_k = \frac{4\cdot(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \underbrace{|a_k| = \frac{4}{2k+1}}_{\text{Ej konvergent (jämförelse med p-serie för } p=1)}$

$\therefore$ Konvergent men ej absolutkonvergent och således <u>villkorligt konvergent</u>

* Recept för att bestämma konvergens

1. Kolla termtestet $\Rightarrow$ <u>möjligtvis</u> konvergent
2. Kolla alternerande test om tillämpbart (om serien är alternerande)
3. Ta belopp och undersök absolutkonvergens
   a) Om $a_k \sim k^{-p}$ använd jämförelsetest I eller II och p-serie
   b) Annars använd <u>kvottestet</u>