* Idag: Ekvationer, rötter, fixpunkter
Bisektionsalgoritmen &
Bolzanos sats
(AL 6.1–2)

$\boxed{\text{F16}}$

* 6.1 Ekvationer, rötter och fixpunkter

Definition: Ekvation

En logisk utsaga $P(x) = Q(x)$ som är sann för inga, något, flera eller alla x. En lösning $\bar{x}$ är ett tal som uppfyller ekvationen.

Definition: Rot

Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En rot $\bar{x}$ till f är en lösning till ekvationen $\boxed{f(x) = 0}$

Definition: Fixpunkt

Låt $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En fixpunkt $\bar{x}$ till g är en lösning till ekvationen $\boxed{x = g(x)}$

• Omskrivning av ekvationer

allmän form

$$\boxed{P(x) = Q(x)}$$

$P = f$
$Q = 0$

enkelt

$f = P - Q$

$$\boxed{f(x) = 0}$$ ← normalform

$f = x - g$

?

$$\boxed{x = g(x)}$$ ← fixpunktsform

Enkelt recept: (ett av oändligt många)

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha f(x) = 0, \quad \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \alpha f(x) = x$$

$$\boxed{x = x + \alpha f(x)}$$

Exempel:

Allmän form:

$$x = \cos x$$

Normalform:

$$\underbrace{x - \cos x}_{f(x)} = 0$$

Fixpunkt~~s~~form:

$$x = x + \alpha\,(x - \cos x)$$

$$x = x - 0.1 \cdot (x - \cos x)$$

$$x = x + \pi \cdot (x - \cos x)$$

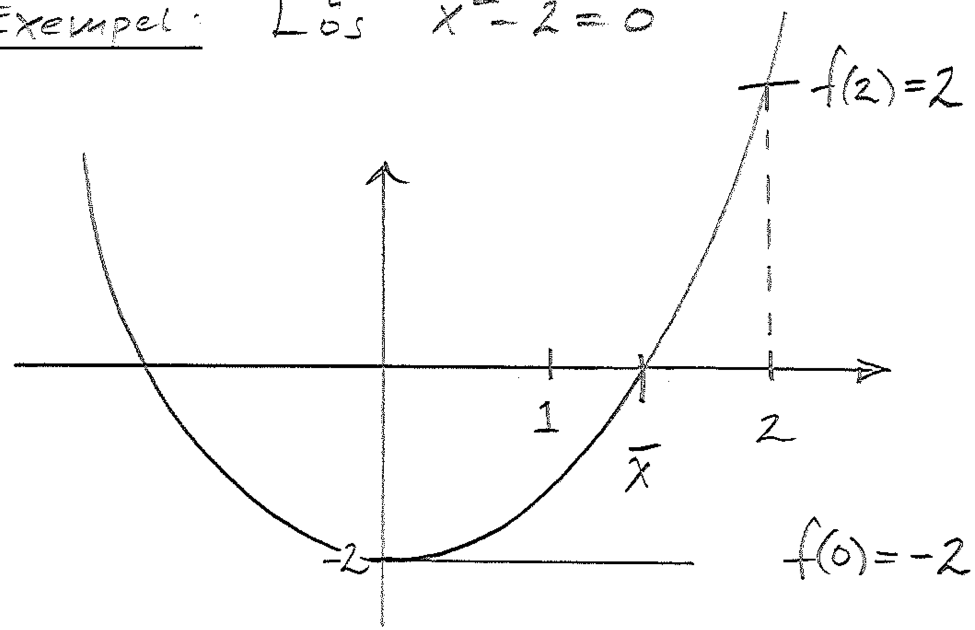
$$x = \cos x \quad (!)$$

$$x = x + \underbrace{\frac{-1}{1+\sin x}}_{=\alpha} \cdot (x - \cos x)$$

6.2 Bisektionsalgoritmen

Generell metod för att lösa ekvationen $f(x) = 0$ för $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exempel: Lös $x^2 - 2 = 0$



Notera:

- $f(0) = 0^2 - 2 = -2 < 0$
  $f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[0, 2]$.

(Den sista omskrivningen skall vi prata mer om på F17!)

- Undersök mittpunkten $x=1$:

$$f(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0$$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[1,2]$

- Undersök mittpunkten $x=1.5$:

$$f(1.5) = 1.5^2 - 2 = 0.25 > 0$$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[1,1.5]$

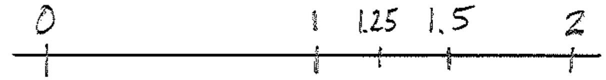
- Undersök mittpunkten $x=1.25$

$$f(1.25) = 1.25^2 - 2 = -0.4375 < 0$$

$\therefore$ Sök $\bar{x}$ på intervallet $[1.25, 1.5]$

Upprepa för att stänga in $\bar{x} = \sqrt{2}$ på allt mindre intervall!

$$f(x) = x^2 - 2$$



$n=0$:	-2	-1		2
$n=1$:		-1	0.25	2
$n=2$:		-1	-0.4375	0.25
$n=3$:			-0.4375	0.25
			<0	>0

Roten $\bar{x} = \sqrt{2} \approx 1.41 \in (1.25, 1.5)$.

För att formulera algoritmen, låt

$$\begin{cases} x_n = \text{vänster ändpunkt i steg } n \\ X_n = \text{höger ändpunkt i steg } n \\ \hat{x}_n = \text{mittpunkten i steg } n \end{cases}$$

$$y_n = f(x_n) \quad \hat{y}_n = f(\hat{x}_n) \quad Y_n = f(X_n)$$

I vårt exempel har vi:

	x_n	$\hat{x}_n$	$\bar{x}_n$	y_n	$\hat{y}_n$	$\bar{y}_n$
$n=0$	0	1	2	−2	−1	2
$n=1$	1	1.5	2	−1	0.25	2
$n=2$	1	1.25	1.5	−1	−0.4375	0.25
$n=3$	1.25	1.375	1.5	−0.4375	<0	0.25

Notera: Endast $\hat{x}_n$ och $\hat{y}_n$ behöver beräknas i varje steg!

Bisektionsalgoritmen:

$x_0 \leftarrow a$
$\bar{x}_0 \leftarrow b$
$y_0 \leftarrow f(x_0)$
$\bar{y}_0 \leftarrow f(\bar{x}_0)$
$n \leftarrow 0$
while $\bar{x}_n - x_n > TOL$ do — tolerans/noggrannhet
  $\hat{x}_n \leftarrow (x_n + \bar{x}_n)/2$
  $\hat{y}_n \leftarrow f(\hat{x}_n)$
  if $y_0 \hat{y}_n < 0$ — byter tecken på vänstra intervallet
    $x_{n+1} \leftarrow x_n$
    $\bar{x}_{n+1} \leftarrow \hat{x}_n$
  else if $\hat{y}_n \bar{y}_0 < 0$ — byter tecken på högra intervallet
    $x_{n+1} \leftarrow \hat{x}_n$
    $\bar{x}_{n+1} \leftarrow \bar{x}_n$
  else
    break — Vi hittade $\bar{x}$!
  end if
  $n \leftarrow n+1$
end while

Den approximativa lösningen ges av $\hat{x} = \hat{x}_n$.

Naturliga frågor:

1) Konvergerar (x_n), $(\hat{x}_n)$ och $(\bar{X}_n)$?

2) Om de konvergerar mot något $\bar{x}$, är då $\bar{x}$ en rot?

Besvaras av Bolzanos sats som bevisas genom att genomföra bisektionsalgoritmen!

Bolzanos sats:

Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$ och $f(a) \cdot f(b) < 0$ så har $f(x) = 0$ (minst) en rot $\bar{x} \in (a, b)$, dvs

$$\exists\, \bar{x} \in (a, b) : f(\bar{x}) = 0.$$

Bevis:

(Vi antar i tillägg att f är Lipschitz-kontinuerlig.)

Bevisidé:

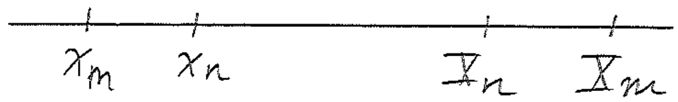
(i) Generera en talföljd (x_n)

(ii) Visa att (x_n) är Cauchy och därmed konvergent mot något $\bar{x}$.

(iii) Visa att $\bar{x}$ är en rot, dvs $f(\bar{x}) = 0$.

(i) Låt x_n = vänster ändpunkt i steg n av bisektionsalgoritmen.

(ii) Antag (utan inskränkning) att $m \leq n$:



$$\Rightarrow |x_m - x_n| = x_n - x_m \leq \bar{X}_n - x_m \leq \bar{X}_m - x_m = 2^{-m} \cdot (b-a).$$

$\therefore \quad |x_m - x_n| \to 0$ då $m,n \to \infty$.

$\therefore \quad (x_n)$ Cauchy-följd

$\Rightarrow \quad (x_n)$ konvergent

dvs $\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R} : x_n \to \bar{x}$

Enligt konstruktion gäller att $\bar{x} \in (a,b)$.

(ii) Visa att $f(\bar{x}) = 0$.

Antag (utan inskränkning) att $f(a) < 0$.

$\Rightarrow f(x_n) < 0, \quad f(\bar{x}_n) > 0$ för alla n.

ty f kontinuerlig

$$\Rightarrow |f(\bar{x})| = |f(\lim_{n\to\infty} x_n)| = |\lim_{n\to\infty} f(x_n)|$$

$$= \lim_{n\to\infty} -f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} -f(x_n) + f(\bar{x}_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} |f(\bar{x}_n) - f(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty} L_f \cdot |\bar{x}_n - x_n|$$

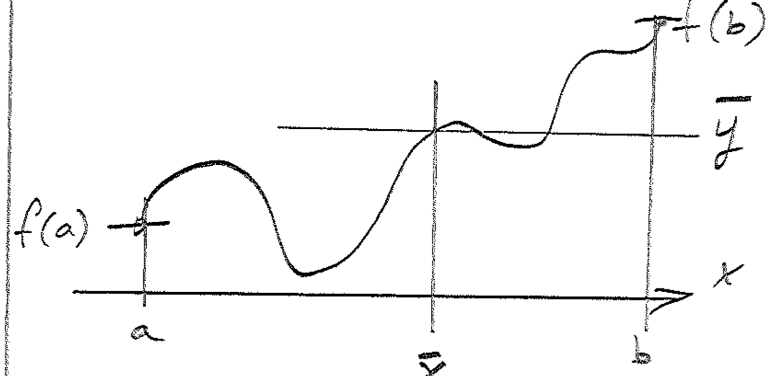
$$= 0.$$

$\therefore \quad f(\bar{x}) = 0.$ ∎

Korollarium:

Satsen om mellanliggande värden.

Om $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[a,b]$ så antar f alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.



$\exists\, \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x}) = \bar{y}$

Bevis:

Låt $h(x) = f(x) - \bar{y}$.

Notera att $h(a) \cdot h(b) < 0$.

Bolzano $\Rightarrow \exists\, \bar{x} : h(\bar{x}) = 0$. ∎