* **Idag:** Fixpunktsalgoritmen
Banachs fixpunktssats

$\boxed{F17}$ (AL 6.3)

"Kanske den mest episka föreläsningen."

6.3 Fixpunktsalgoritmen

Lös ekvationen $f(x)=0$ genom att skriva om på fixpunktsform $x=g(x)$ och fixpunktsiterera:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

för $n=0,1,2,\ldots$

Konvergerar förhoppningsvis (!) mot en fixpunkt $\bar{x}=g(\bar{x})$.

Exempel: $f(x)=x^2-2$

Omskrivning $x = \underbrace{x+\alpha f(x)}_{=g(x)}$

(1) $\alpha = -0.2$

$\Rightarrow g(x) = x - 0.2 \cdot f(x)$

(2) $\alpha = +0.2$

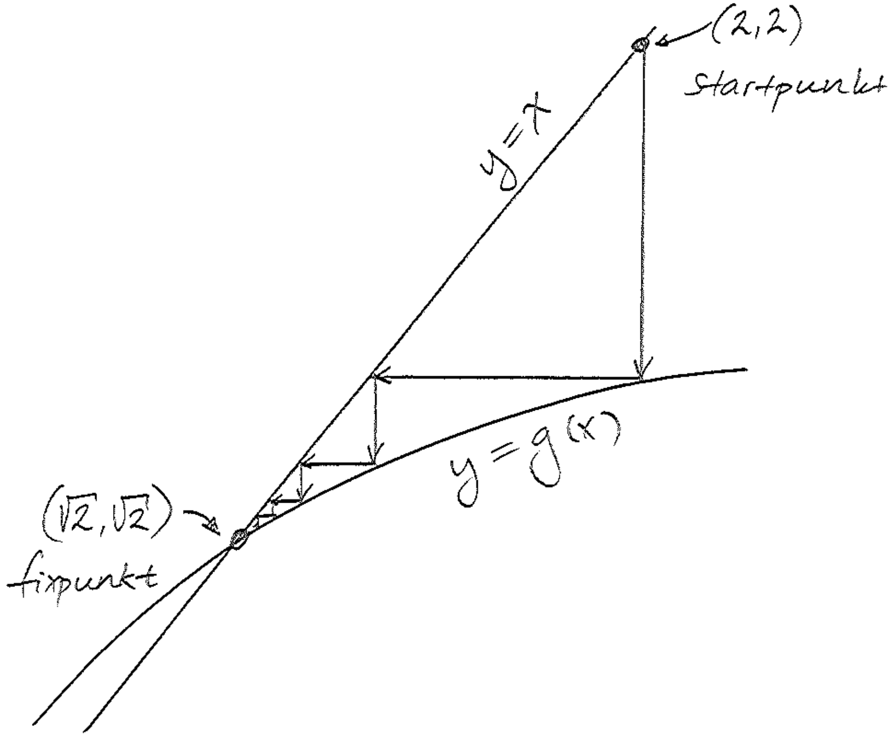
$\Rightarrow g(x) = x + 0.2 \cdot f(x)$

(3) $\alpha = -1/(2x)$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{x+2/x}{2}$

(Se problem P6.2 !)

Illustration av (1) för $x_0 = 2$.

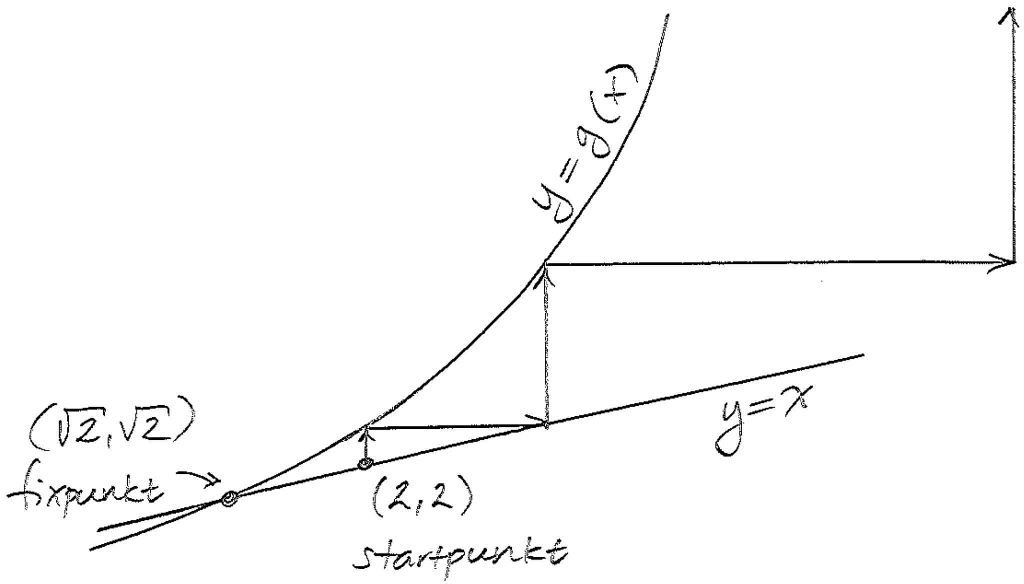


Konvergerar mot fixpunkten $\bar{x} = \sqrt{2}$.

Notera: $g' < \frac{d}{dx} x = 1$

$\Rightarrow$ Iterationen stängs in mellan kurvorna och konvergerar.

Illustration av (2) för $x_0 = 2$



Iterationen divergerar

Notera: $g' > \frac{d}{dx} x = 1$

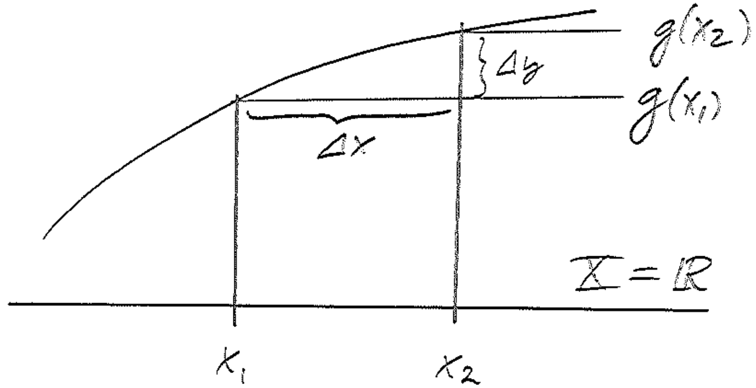
$\Rightarrow$ Iterationen smiter iväg!

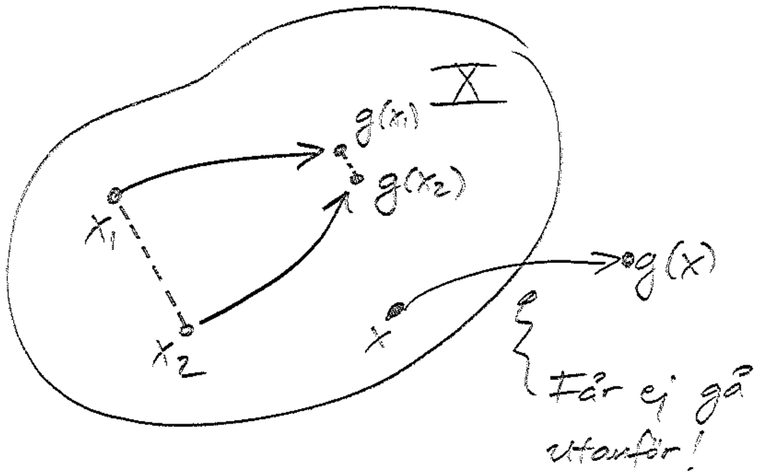
När konvergerar fixpunktsiterationen?

Svar: Banachs fixpunktssats!

Definition: Kontraktionsavbildning

En kontraktionsavbildning på $I \subseteq \mathbb{R}$ är en funktion $g : I \to I$ med Lipschitzkonstant $L_g < 1$.





Sats: Banachs fixpunktssats

Om $g : I \to I$ är en kontraktion på det slutna intervallet I så har g en entydig fixpunkt på I, dvs

$$\exists!\ \bar{x} \in I : \quad \bar{x} = g(\bar{x}).$$

Lemma: Geometrisk summa

$$1 + x + x^2 + \ldots x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

(Bevis: Se intromatten!)

Bevis: (Av Banach)

Bevisidé:
(i) Generera en talföljd (x_n)
(ii) Visa att (x_n) är Cauchy $\Rightarrow x_n \to \bar{x}$
(iii) Visa att $\bar{x}$ är en fixpunkt, dvs $\bar{x} = g(\bar{x})$
(iv) Visa att $\bar{x}$ är unik

(i) Välj godtyckligt $x_0 \in I$ och låt

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(ii) Betrakta först skillnaden $x_{k+1} - x_k$:

$$\begin{aligned}
|x_{k+1} - x_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\
&\leq L_g \cdot |x_k - x_{k-1}| \\
&\leq L_g^2 \cdot |x_{k-1} - x_{k-2}| \\
&\leq \ldots \leq \underbrace{L_g^k \cdot |x_1 - x_0|}_{} \quad (*)
\end{aligned}$$

($\to 0$ då $k \to \infty$ men räcker ej)

Betrakta nu skillnaden $x_m - x_n$ och antag (utan inskränkning) att $m \leq n$.

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &\overset{\text{(lägg till och dra ifrån)}}{=} |(x_m - x_{m+1}) + (x_{m+1} - \ldots + (x_{n-1} - x_n)| \\
&\overset{\text{(triangelolikheten)}}{\leq} |x_m - x_{m+1}| + |x_{m+1} - x_{m+2}| + \ldots + |x_{n-1} - x_n| \\
&\overset{(*)}{\leq} L_g^m \cdot |x_1 - x_0| + L_g^{m+1} \cdot |x_1 - x_0| + \ldots + L_g^{n-1} |x_1 - x_0| \\
&= L_g^m \cdot (1 + L_g + L_g^2 + \ldots + L_g^{n-m-1}) |x_1 - x_0| \\
&= L_g^m \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-m-1} L_g^k\right) \cdot |x_1 - x_0| \\
&\overset{\text{(Lemma)}}{=} L_g^m \cdot \frac{1 - L_g^{n-m}}{1 - L_g} \cdot |x_1 - x_0| \\
&\leq L_g^m \cdot \frac{1}{1 - L_g} \cdot |x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

$\to 0$ då m (och n) $\to \infty$ ty $L_g < 1$.

$\therefore$ (x_n) Cauchy-följd (på slutet intervall I)

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in I : x_n \to \bar{x}$.

Är $\bar{x}$ en fixpunkt?

(iii) Visa att $\bar{x}$ är en fixpunkt:

$$g(\bar{x}) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

g kontinuerlig

$$= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

$\therefore$ $\bar{x}$ är en fixpunkt

(iv) Visa att $\bar{x}$ är unik:

Antag att det finns två fixpunkter:

$$\begin{cases} \bar{x} = g(\bar{x}) \\ \tilde{x} = g(\tilde{x}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |\bar{x} - \tilde{x}| = |g(\bar{x}) - g(\tilde{x})|$$

$$\leq L_g \cdot |\bar{x} - \tilde{x}|$$

$\bar{x} - \tilde{x} \neq 0 \Rightarrow 1 \leq L_g$ ↯

$\therefore$ $\bar{x} - \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \tilde{x}$.

$\therefore$ $\bar{x}$ unik.

:-)

$\blacksquare$

Fixpunktsalgoritmen:

$x_1 \leftarrow g(x_0)$

$n \leftarrow 0$

while $|x_n - x_{n+1}| > TOL$ do

  $n \leftarrow n+1$

  $x_{n+1} \leftarrow g(x_n)$

end while

$\hat{x} \leftarrow x_{n+1}$

lösningen (approximation)

Exempel: Fungerar även i flera dimensioner, t. ex.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} 3x + 2y^2 = 5 \\ \sin(\pi x/2) \cdot (1+y^3) = 2 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x+2y^2-5 \\ \sin(\pi x/2)\cdot(1+y^3)-2 \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \cdot f(x,y)$$

Konvergerar mot fixpunkten

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

för $\alpha = -1$.

Fördel relativt bisektion:

- Kan konvergera mycket snabbare
- Fungerar i flera dimensioner

Nackdel:

- Svårighet att bestämma α så att $L_g < 1$.

Men: Newtons metod kommer ge oss ett recept att bestämma α!