* Idag: Tillämpningar

F19

- Beräkning av de elementära funktionerna (7.1)
- Simulering av mekaniska system (7.2)

- 7.1 Beräkning av de elementära funk.

* Varför är exp, sin och cos så viktiga?

Svar: Lösningar till grundläggande matematiska modeller!

Exempel:

1) Radioaktivt sönderfall

$$-u'(t) = \alpha u(t)$$

Lösning: $u(t) = u_0 \cdot \exp(-\alpha t)$

2) Harmonisk svängning

$$\underbrace{m x''(t)}_{m \cdot a} = \underbrace{-K \cdot x}_{F}$$

(Newtons 2:a lag)

Lösning:

$$x(t) = A\cos(\sqrt{K}t) + B\sin(\sqrt{K}t)$$

* Mekaniska och digitala räknemaskiner

1) Babbage mekaniska differensmaskin (~1850), drevs av en vev och kunde beräkna exp, sin, cos!

2) HP35, den första (tekniska) miniräknaren (1972)

* Beräkning med Taylorpolynom

$$\sin(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

$$E_n(x) = \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-\bar{x})^{n+1}}$$

Resttermen enligt Taylors sats

Felet litet om $|x-\bar{x}|$ är litet och n stort.

$\Rightarrow$ Problem att beräkna $\sin(x)$ om x är stort (för $\bar{x}=0$)

Lösning: Flytta argumentet till $[0, \pi/2]$

1) Periodicitet

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = \sin(\underbrace{x - 2\pi n}_{\in [-\pi, \pi]})$$

2) $\sin(x)$ udda

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = \pm \sin(\underbrace{|x|}_{\in [0, \pi]})$$

3) Supplementvinkelidentitet

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = \sin(\underbrace{\pi - x}_{\in [0, \pi/2]})$$

$\bar{x} = 0$

$$\Rightarrow \quad |E_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{|f^{(n+1)}|}_{\leq 1} \cdot |x - 0|^{n+1}$$

$$\leq \frac{(\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!} \approx \varepsilon_{mach} \approx 2 \cdot 10^{-16}$$

för $n = 21$

$\therefore$ Använd 21:a gradens Maclaurinpolynom för $\sin(x)$

* <u>CORDIC-algoritmen</u> (Volders algoritm)

Hemligheten bakom HP35

– Givet vinkel x, beräkna

$$z = \exp(ix) = \underline{\cos(x)} + i\,\underline{\sin(x)}$$

Ger både $\cos(x)$ och $\sin(x)$.

– Starta med

$$z = \exp(iv) = 0, \quad \text{dvs } v = 0$$

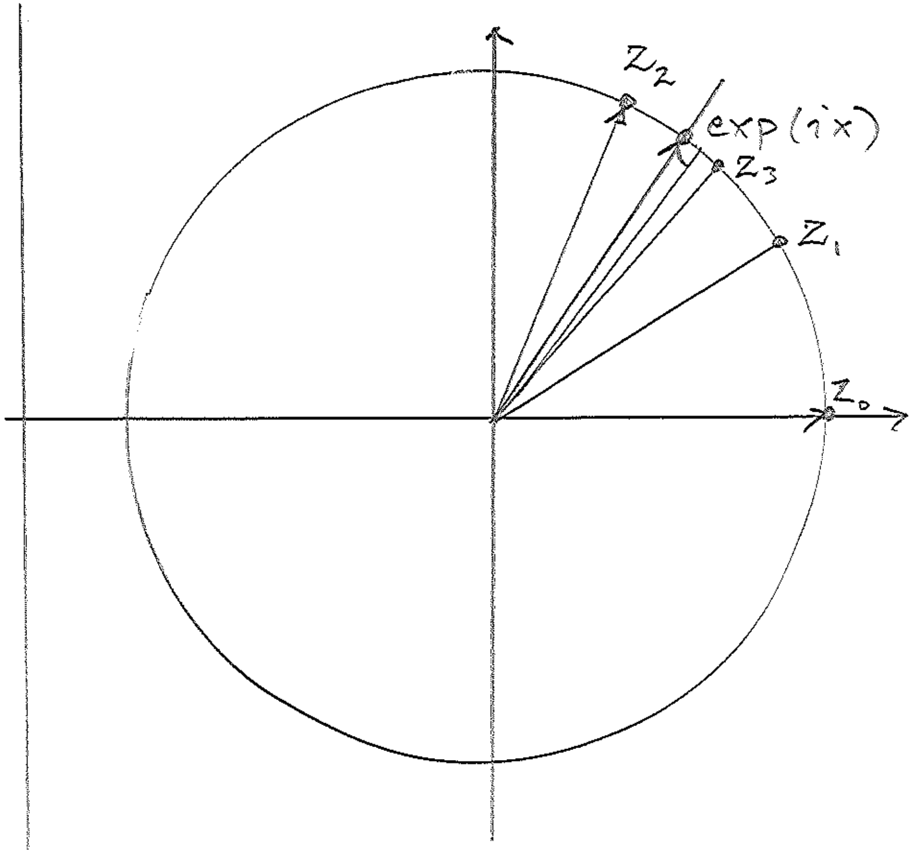
och rotera z i små steg tills

$v \approx x$ och därmed

$$z = \exp(iv) \approx \exp(ix).$$

– Tabell med vinkelinkrement:

n	v_n	t_n
0	$\arctan(t_0)$	1
1	$\arctan(t_1)$	1/2
2	$\arctan(t_2)$	1/4
3	$\arctan(t_3)$	1/8
$\vdots$		
n		2^{-n}



Genom ett <u>listigt val av vinklar</u> kan beräkningen av z utföras (nästan) enbart genom addition, subtraktion och multiplikation/division med 2! (Se boken!)

$\Longrightarrow$ <u>Mycket</u> effektivt!

"Shift"-operation ≪

$$2 \times \underbrace{11011011}_{219} = \underbrace{110110110}_{438}$$

- CORDIC-algoritmen ger en ny binär siffras noggrannhet och konvergerar därför efter (ca) $\underline{\underline{52}}$ iterationer

$$2^{-52} = \frac{1}{4} \cdot 2^{-50} = \frac{1}{4} \cdot (\underbrace{2^{-10}}_{=1024^{-1}})^5$$

$$\approx 0.25 \cdot (10^{-3})^5$$

Bra att kunna!

$$\approx 2 \cdot 10^{-16} \approx \varepsilon_{mach}$$

• 7.2 Simulering av mekaniska system

* Newtons 3 lagar: Principia 1687

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

En av världens viktigaste ekvationer!

Newtons 2:a lag

=> Simulering av alla tänkbara mekaniska system

Exempel:

1) Blodflödet genom en hjärtklaff
2) Vårt solsystem

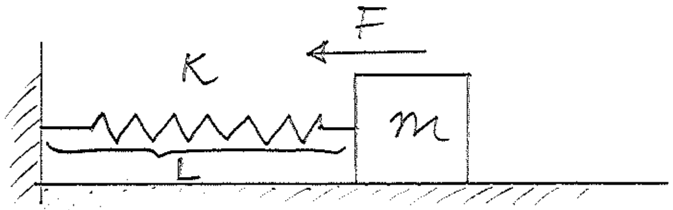
Kontinuumsmodell

=> Partiell differentialekvation (lp IV)

Diskret modell

=> System av ordinära differentialekvationer (lp II)

* System av massor och fjädrar

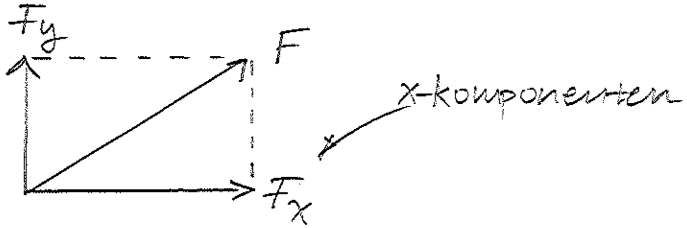


$$F = k \cdot (L - L_0)$$

fjäderkonstant

naturlig längd

Kraften F är en vektor!



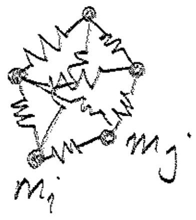
- System av N massor och

$$(N-1)+(N-2)+\ldots+2+1=\frac{N\cdot(N-1)}{2} \text{ fjädrar.}$$

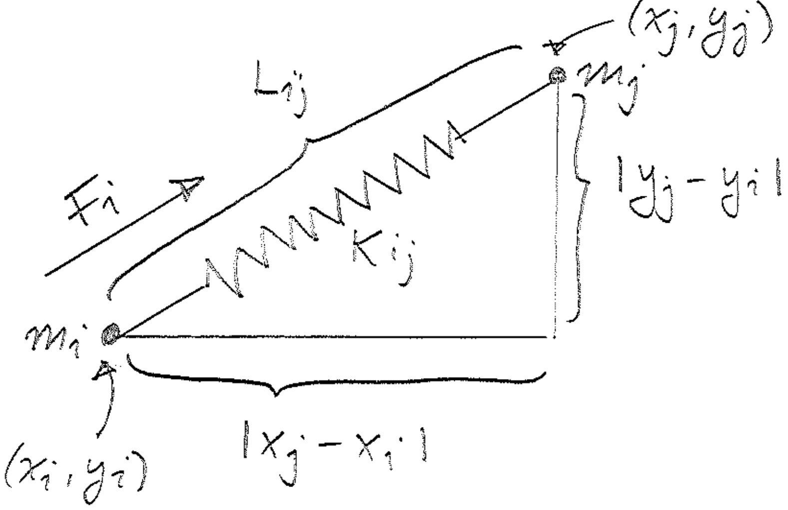
- 6N frihetsgrader:

  3N koordinater x_i, y_i, z_i

  \+ 3N hastigheter $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$



- Kraft på partikel i från partikel j:



$$F_{ij} = K_{ij}\cdot(L_{ij} - L_{ij}^{\circ})$$

$$L_{ij} = \sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2}$$

- Summera:

$$F_i^x = \sum_{j\neq i} K_{ij}\,(L_{ij}-L_{ij}^{\circ})\cdot\frac{x_j-x_i}{L_{ij}}$$

$$F_i^y = \sum_{j\neq i} K_{ij}\,(L_{ij}-L_{ij}^{\circ})\cdot\frac{y_j-y_i}{L_{ij}}$$

$$F_i^z = \sum_{j\neq i} K_{ij}\,(L_{ij}-L_{ij}^{\circ})\cdot\frac{z_j-z_i}{L_{ij}}$$

$$-m_i g$$

gravitationskraft

- Mekanisk jämvikt: $F=0$

$$F_i^x = 0, \quad i=1,2,\ldots,N$$

$$F_i^y = 0, \quad i=1,2,\ldots,N$$

$$F_i^z = 0, \quad i=1,2,\ldots,N$$

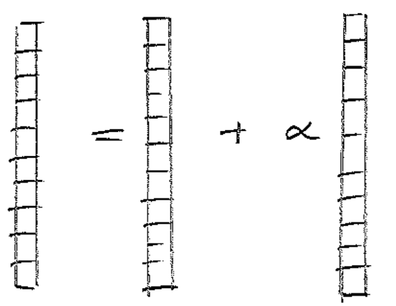
3N ekvationer & 3N obekanta!

- Lös med fixpunktsiteration!

$$x^{n+1} = g(x^n)$$

$$g(x) = x + \alpha f(x)$$

Fungerar också för system av ekvationer!



x^{n+1} x^n $f(x^n)$

- Fixpunktsiteration för mekanisk jämvikt:

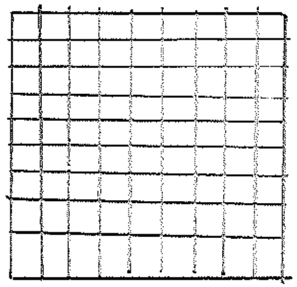
$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n + \alpha F_1^x(x^n, y^n, z^n) \\ y_1^{n+1} = y_1^n + \alpha F_1^y(x^n, y^n, z^n) \\ z_1^{n+1} = z_1^n + \alpha F_1^z(x^n, y^n, z^n) \end{cases}$$

- Använd Newtons metod?

$$f : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$$

$$f' : \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}^{3N}$$

en <u>matris</u> av dimension $(3N) \times (3N)$

$f' =$  lp III + IV !

$$x^{n+1} = x^n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n)$$

Effektivt men kräver matematik från framtiden! (lp III + IV) :-)
(Men extra bonuspoäng till den som klarar det!)