* Idag: Repetition

$\boxed{\text{F21}}$

- Kapitel 1: Reella tal

Mängdlära

Def.
- *Mängd: $x \in X$, $x \notin X$
- *Mängdrelationer: $A \subseteq B$, $A = B$, $A \subset B$
- *Mängdoperationer: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$

Matematisk logik

Def.
- *Logiska utsagor: $P = T$, $P = F$
- *Logiska operatorer: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Satser:
- *Logisk algebra: kommutativa, associativa, distributiva, de Morgans lagar
- *Logisk slutledning: Modus ponens, Modus tollens

Visas med hjälp av sanningstabeller

Talsystem:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Egenskaper för $\mathbb{Q}$ & $\mathbb{R}$

Satser
- *Algebraiska egenskaper
- *Ordningsegenskaper
- *Triangelolikheten

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$\mathbb{Q}$ ej fullständigt (har "hål"):

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Talföljder:

$$(x_n)_{n=0}^{\infty}$$

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Def.

- Konvergent: **Obs! Viktiga!**

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon$$

- Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Satser

(x_n) konvergent $\Rightarrow$ (x_n) Cauchy

(x_n) Cauchy $\Rightarrow$ (x_n) konvergent

Fullständighetsegenskapen för $\mathbb{R}$

Def.

* Ekvivalensklass : $x \sim y$
* Reella tal: $\mathbb{R}$ ekvivalensklasser av rationella Cauchyföljder

Mängder av reella tal:

Def.

* Intervall
* Öppen, sluten
* Omgivning, inre punkt, randpunkt
* Supremum, infimum

◦ Kapitel 2: Funktioner

Def.

* Funktion, domän, kodomän

$$f : X \to Y$$

* Definitionsmängd: $D(f) = X$
* Värdemängd: $R(f) \subseteq Y$
* Injektiv, surjektiv, bijektiv
* Invers, graf, restriktion

$$f^{-1} : Y \to X \qquad f|_{\hat{X}}$$

* Funktionsrum: V
* Funktionsalgebra

$$f+g,\ f-g,\ fg,\ f/g$$

* Sammansättning: $f \circ g$

* De elementära funktionerna

- Polynom: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ← monom

  Polynomdivision, faktorsatsen

- Rationella funktioner:

  $$f = p / q$$

  ← polynom

- Potensfunktionen:

  $$f(x) = \mathrm{pow}_a(x) = x^\alpha$$

  $$= \exp(\alpha \ln(x))$$

  Potensfunktionens egenskaper

- Exponentialfunktionen:

  $$f(x) = \exp(x) = e^x$$

  Exponentialfunktionens egenskaper

- Naturliga logaritmen:

  $$f(x) = \ln(x)$$

  Logaritmens egenskaper, andra baser

  $$\ln_b(x) = \ln(x) / \ln(b)$$

- Trigonometriska funktionerna

  sin, cos, tan

  Trigonometriska funktionernas egenskaper

- Arcusfunktionerna

  arctan, arccos, arctan

  Arcusfunktionernas egenskaper

  Obs! Definitionsmängder & värdemängder

• Kapitel 3: Gränsvärde & kontinuitet

Def.

* Gränsvärde: $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \bar{y}| < \varepsilon$

* Ensidigt gränsvärde
* Gränsvärde i oändligheten
* Oändligt gränsvärde

Def.

* Kontinuitet (i en punkt)

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

* Ensidig kontinuitet

Def.

* Likformig kontinuitet

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in I :$

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Sats

* Likformig kontinuitet $\Rightarrow$ kontinuitet

Def.

* Lipschitz-kontinuitet

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L_f \cdot |x_1 - x_2|$$

L_f: Lipschitz-konstant

Satser

* Lipschitz-kontinuitet $\Rightarrow$ Likformig kontinuitet
* $L_f = \sup |f'|$ om deriverbar
* Egenskaper: $L_{f+g} = L_f + L_g$ osv

Beräkning av gränsvärden

1) Om kontinuerlig: sätt $x = \bar{x}$
2) Obestämda former (7 st): faktorisera, logaritmera, förläng med konjugat

* Styrkeförhållanden: $\ln < x^\alpha < \exp$
* Standardgränsvärden
* Richardson-extrapolation

- Kapitel 4: Derivata & linjärisering

Def.

* Derivata, deriverbarhet

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

* Deriveringsoperatorn: $D : f \mapsto f'$

* Högre ordningens derivator:

$$f^{(n)} = D^n f$$

* Rummen C, C^n, C^∞

Satser:

* De elementära funktionernas derivator: $(\exp)' = \exp$, $(\sin)' = \cos$, osv

* Derivatans linjäritet:

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$$

* Derivata av produkt (Leibniz regel)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

* Derivata av kvot: $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

* Kedjeregeln

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

inre derivatan

* Derivata av invers:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Satser

Extremvärden

* Lokalt maximum/minimum

* Globalt maximum/minimum

* Växande/avtagande

* Konvex, konkav

Def.

* Extremvärdessatsen: $\exists$ max och min

* Inre extrempunkt stationär: $f'(\bar{x}) = 0$

Sats

Lösning av extremvärdesproblem:

$$\begin{cases} 1) \text{ stationära punkter} \\ 2) \text{ singulära punkter} \\ 3) \text{ ändpunkter} \end{cases}$$

Satser:

* Rolles sats:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \bar{x} \in (a,b) : \quad f'(\bar{x}) = 0$$

* Medelvärdessatsen:

(I)

$$\exists \bar{x} \in (a,b) : \quad f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(II)

$$\exists \bar{x} \in (a,b) : \quad f(b) - f(a) = f'(\bar{x}) \cdot (b - a)$$

(III)

$$\exists \xi \in (\bar{x}, x) : \quad f(x) = f(\bar{x}) + f'(\xi) \cdot (x - \bar{x})$$

* (Generaliserade medelvärdessatsen)

Def.

* Linjärisering:

$$L_{\bar{x}}[f](x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x})$$

Sats:

* Linjäriseringsfelet:

$$f(x) - L_{\bar{x}}[f](x) \leq \frac{(x - \bar{x})^2}{2} \cdot \sup |f''|$$

Def.

* Ensidig numerisk derivata

$$D_h[f](x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

* Symmetrisk numerisk derivata

$$S_h[f](x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Satser

* Feluppskattning:

$$f' - D_h \sim h \quad \text{(första ordningen)}$$

$$f' - S_h \sim h^2 \quad \text{(andra ordningen)}$$

* Optimal steglängd:

$$D_h : \ \varepsilon_{mach}^{1/2} \sim 10^{-8}$$

$$S_h : \ \varepsilon_{mach}^{1/3} \sim 10^{-5}$$

• 5. Taylorpolynom & serier

Def.

* Taylorpolynom

$$P_n[f,\bar{x}](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) \cdot (x-\bar{x})^k$$

* Maclaurinpolynom: $\bar{x} = 0$

Satser:

* Derivator av Taylorpolynom

$$D^k P_n(\bar{x}) = D^k f(\bar{x}), \quad k = 0, \dots, n$$

* Taylors sats:

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-\bar{x})^{n+1}}_{= E_n(x)}$$

Beräkning av gränsvärden

* Ordonotation: $\mathcal{O}(x^p)$
* Räkneregler för ordo + Taylorpolynom
* L'Hôpitals regler

Def.

* Serie: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
* Delsumma, konvergent, divergent
* Absolutkonvergent
* Villkorligt konvergent
* Alternerande
* Slutligen

Satser

* Absolutkonvergens $\Rightarrow$ Konvergens
* Geometrisk summa + serie
* p-serie
* Konvergenstester
  - Termtest
  - Jämförelsetest I + II
  - Kvottest
  - Alternerande test

Def.

* Potensserie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\text{koefficient}} (x - \underbrace{\bar{x}}_{\text{centrum}})^k$$

Konvergensradie R

Sats:

* Konvergens: inom radie R från $\bar{x}$

* Egenskaper: kan adderas och deriveras termvis

Def.

* Taylorserie:

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x})}_{= a_k} \cdot (x - \bar{x})^k$$

* $T = f$ om f är analytisk

Obs! ~~Att~~ kunna Taylorserierna i Ruta 5.2!

• 6. Ekvationslösning: $f(x) = 0$

Def

* Ekvation, lösning

* Rot: $f(\bar{x}) = 0$

* Fixpunkt: $\bar{x} = g(\bar{x})$

Sats

* Bisektionsalgoritmen

* Bolzanos sats: $\exists\, \bar{x} : f(\bar{x}) = 0$

Bevis = algoritm!

* Satsen om mellanliggande värden (följdsats)

Def

* Fixpunktsiteration: $x^{n+1} = g(x^n)$

* Kontraktionsavbildning:

1) $g : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$

2) $L_g < 1$

Sats

* Fixpunktsalgoritmen

* Banachs fixpunktssats: $\exists!\, \bar{x} : \bar{x} = g(\bar{x})$

Bevis = algoritm!

* Newtons metod:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

* <u>Konvergenshastighet</u>:

Bisektion linjär: $\mu = 1/2$

Fixpunkt linjär: $\mu = L_g$

Newton <u>kvadratisk</u>!