* Idag: Algebraiska räkningar (RP kap 1)

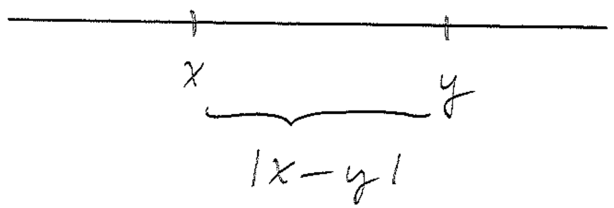
$\boxed{\text{I01}}$

---

* Absolutbelopp

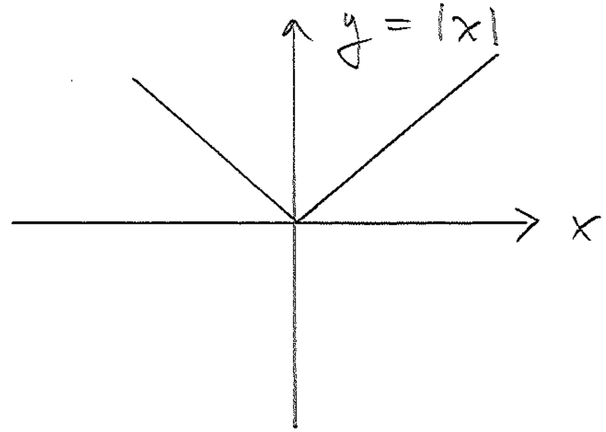
$|x| =$ avståndet till 0

$|x-y| =$ avståndet mellan x och y



Definition:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$



Egenskaper:

$$\begin{cases} |-x| = |x| \\ |xy| = |x| \cdot |y| \\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \\ |x \pm y| \leq |x| + |y| \quad \text{(triangelolikheten)} \end{cases}$$

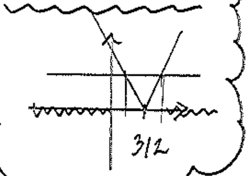
Övning: Visa att

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$$

* Ekvationer med absolutbelopp

Dela upp i fall!

Alternativt



Exempel:

$$|2x-3| > 1$$

$x = 3/2$, x

$x < 3/2$	$x \geq 3/2$
$-(2x-3) > 1$	$2x-3 > 1$
$2x-3 < -1$	$2x > 4$
$2x < 2$	$\underline{\underline{x > 2}}$ $\underline{\underline{\text{ok!}}}$
$\underline{\underline{x < 1}}$ $\underline{\underline{\text{ok!}}}$	

$\therefore$ $x < 1$ eller $x > 2$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)}}$$

* Kvadratrötter

$\sqrt{x}$ för $x \geq 0$ är den positiva lösningen y till ekvationen $y^2 = x$.

Notera: (i) $\sqrt{x} \geq 0$

(ii) $y^2 = x$ $(x > 0)$

har två lösningar: $y = \pm\sqrt{x}$

(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$

* Faktorsatsen

Om $p = p(x)$ är ett polynom i x och $p(\bar{x}) = 0$ så är $(x - \bar{x})$ en faktor i p.

Exempel: $p(x) = x^3 - 9x + 10$

Vi noterar att $p(2) = 8 - 18 + 10 = 0$

$\Rightarrow \quad p(x) = (x-2) \cdot q(x)$

Bestäm $q(x)$: (genom polynomdivision)

$$\frac{x^3 - 9x + 10}{x-2} = x^2 + \frac{r_1(x)}{x-2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^3} - 9x + 10 = \cancel{x^3} - 2x^2 + r(x)$$

$$r_1(x) = 2x^2 - 9x + 10$$

$$\frac{r_1(x)}{x-2} = \frac{2x^2 - 9x + 10}{x-2} = 2x + \frac{r_2(x)}{x-2}$$

$$\Rightarrow r_2(x) = \cancel{2x^2} - 9x + 10 - \cancel{2x^2} + 4x$$

$$= -5x + 10 = -5 \cdot (x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 9x + 10}{x-2} = x^2 + 2x - 5$$

$$\Rightarrow x^3 - 9x + 10 = (x-2) \cdot (x^2 + 2x - 5)$$

Kontroll:

$$(x-2) \cdot (x^2 + 2x - 5)$$

$$= x^3 + \cancel{2x^3} - 5x - \cancel{2x^2} - 4x + 10$$

$$= x^3 - 9x + 10 \quad \underline{\text{ok!}}$$

Ta för vana att kontrollera era svar (om möjligt)!

Kompakt uträkning med "liggande stolen"

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 5 \\
\hline
x-2 & \cancel{x^3} - 9x + 10 \\
 & \cancel{x^3} - 2x^2 \\
\hline
 & \cancel{2x^2} - 9x + 10 \\
 & \cancel{2x^2} - 4x \\
\hline
 & -5x + 10 \\
 & -5x + 10 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

* Några viktiga faktoriseringar

(i) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

(iv) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

(v) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, endast för udda n!

* "Gissningstekniken" (för "riggade" tentauppgifter)

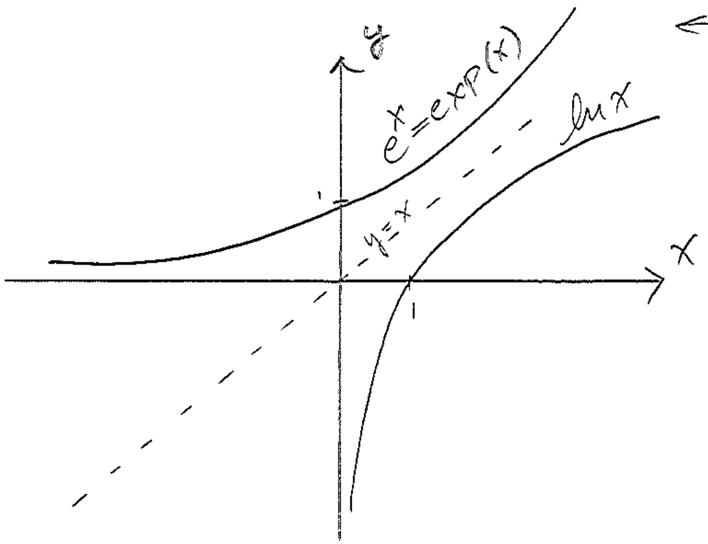
1. Gissa att $\bar{x} = \pm 1, \pm 2$ etc är en lösning
2. Dividera med $x - \bar{x}$
3. Upprepa!

* Logaritmer, exponenter

$$\begin{cases} \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) & (1) \\ \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b) & (2) \\ \ln(a^p) = p\ln(a) & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} e^A \cdot e^B = e^{A+B} & (1') \\ e^A / e^B = e^{A-B} & (2') \\ (e^A)^p = e^{Ap} & (3') \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\ln a} = a, & a > 0 \\ \ln e^A = A, & A \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>Övning:</u> Visa ekvivalens mellan (i) och (i') för i = 1, 2, 3!



spegling i linjen $y = x$

ln och exp är varandras <u>inverser</u>!

* Summabeteckning

$\{a_k\}_{k=1}^{n}$ talföljd

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{summa}$$

* Aritmetiska och geometriska summor

Låt $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ vara en aritmetisk talföljd dvs

$$a_k - a_{k-1} = c = \text{konstant}$$

Då gäller att

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}$$

Övning: Visa detta!

Exempel:

$a_k = k$

$$\sum_{k=1}^{1000} a_k = 1 + 2 + \dots + 1000 = 1000 \cdot \frac{1+1000}{2}$$

$$= 500 \cdot 1001 = \underline{\underline{500500}}$$

Låt $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ vara en geometrisk talföljd, dvs

$$a_k / a_{k-1} = c = \text{konstant}$$

Då gäller att $a_k = a \cdot c^k$ och

Obs!

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a c^k = a \sum_{k=0}^{n-1} c^k$$

Obs!

$$= \boxed{a \cdot \frac{1-c^n}{1-c}}$$

Övning: Visa detta!

Vi noterar att om $|c|<1$, gäller att $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$. Härav följer* att

$$\sum_{k=0}^{\infty} ac^k = \frac{a}{1-c}, \quad |c|<1$$

Exempel:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{a=1}{a} \underset{c=1/2}{c^k}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

*Vi kommer att diskutera detta i detalj i läsperiod 1!