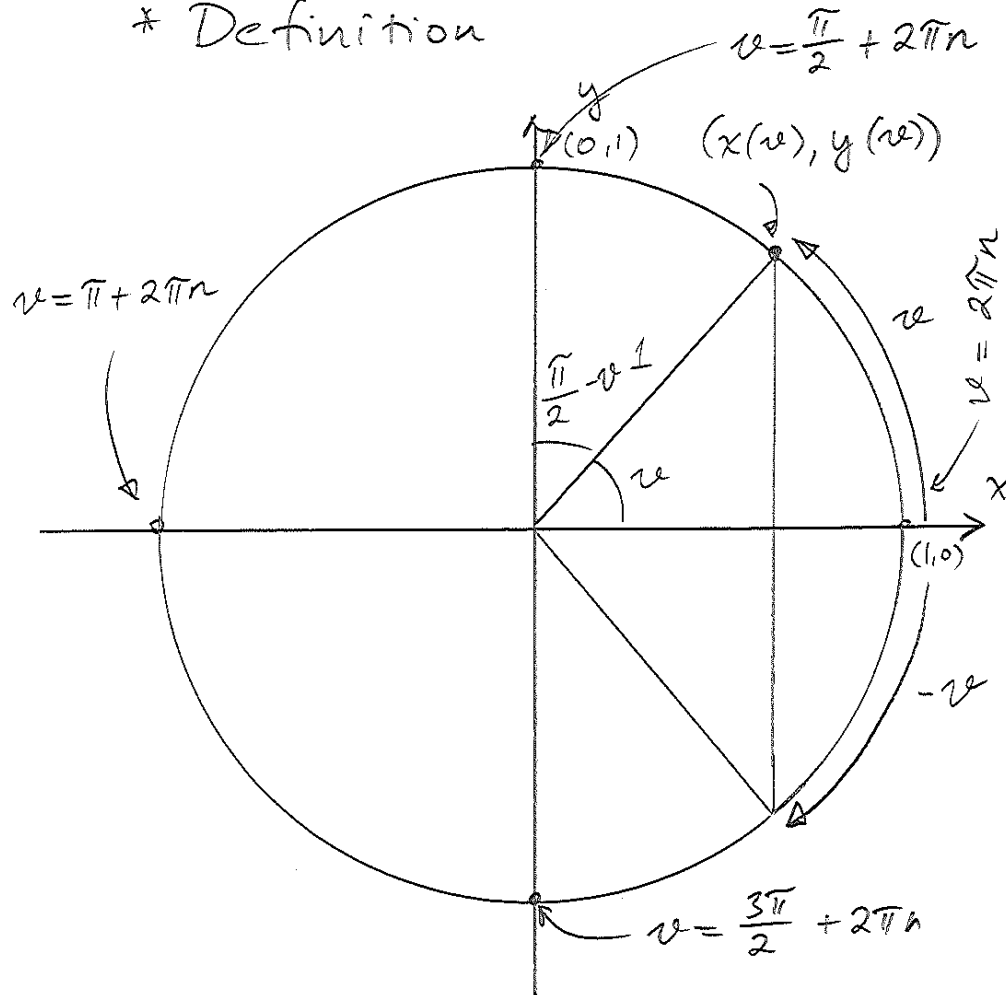


* Idag: Trigonometri

I02 (RP kap 2)

* Definition



$v = \text{vinkel} = \text{båglängd}$

Vi definierar:

$$\begin{cases} \cos(v) = x(v) \\ \sin(v) = y(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, & \cos v \neq 0 \\ \cot v = \frac{\cos v}{\sin v}, & \sin v \neq 0 \\ (\sec v = \frac{1}{\cos v}, & \cos v \neq 0) \\ (\csc v = \frac{1}{\sin v}, & \sin v \neq 0) \end{cases}$$

Notera:

1/4 varv (90°) : $v = \pi/2$ ("radianer")

1/2 varv (180°) : $v = \pi$

3/4 varv (270°) : $v = 3\pi/2$

1 varv (360°) : $v = 2\pi$

* Grundläggande egenskaper

- \cos är jämn:

$$\cos(-v) = \cos(v)$$

- \sin är udda:

$$\sin(-v) = -\sin(v)$$

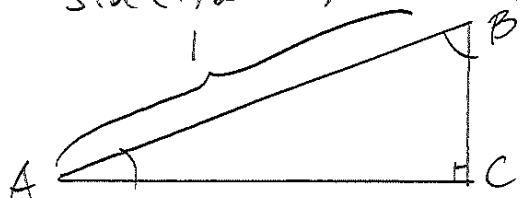
- \sin, \cos är 2π -periodiska:

$$\begin{cases} \sin(v + 2\pi n) = \sin(v) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \cos(v + 2\pi n) = \cos(v) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- vinkelkomplementära identiteter:

$$\cos(\pi/2 - v) = \sin(v)$$

$$\sin(\pi/2 - v) = \cos(v)$$



$$A + C = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin A = \cos B$$

$$\cos A = \sin B$$

komplement
vinklar

- vinkelkomplementära identiteter

$$\sin(\pi - v) = \sin(v)$$

$$\cos(\pi - v) = -\cos(v)$$

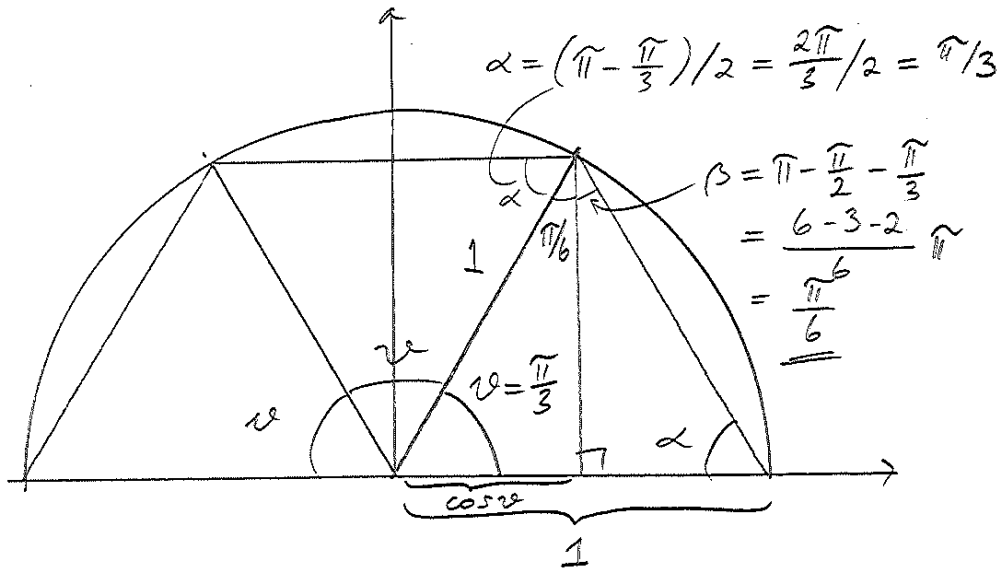
- trigonometriska ettan
 $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

Samtliga dessa identiteter följer direkt ur figuren!

- * Några speciella vinklar

v	$\sin v$	$\cos v$
0	0	1
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/2$	1	0
$3\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
π	0	-1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$

Bör kunna!

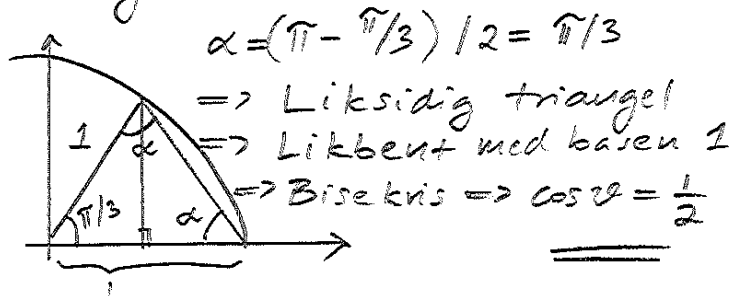


Från figuren följer att triangeln är liksidig.

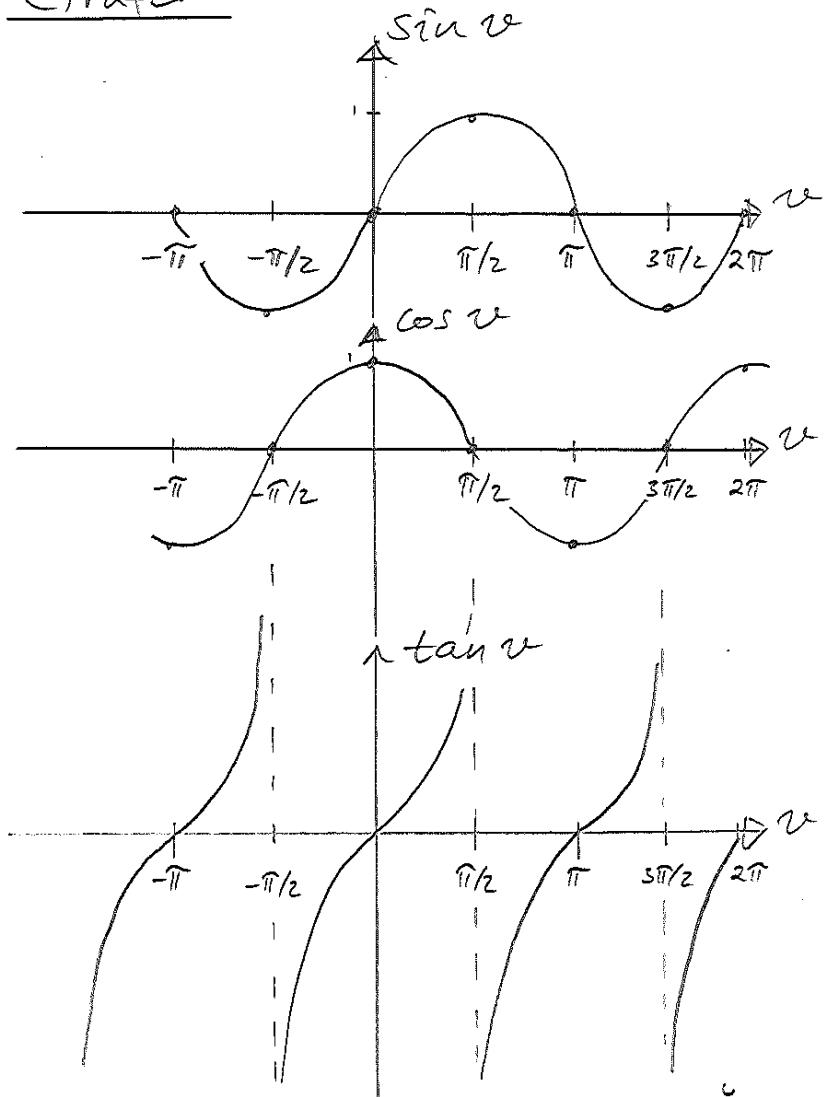
$\Rightarrow \cos v = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin v = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Enklare argument:



* Grafer



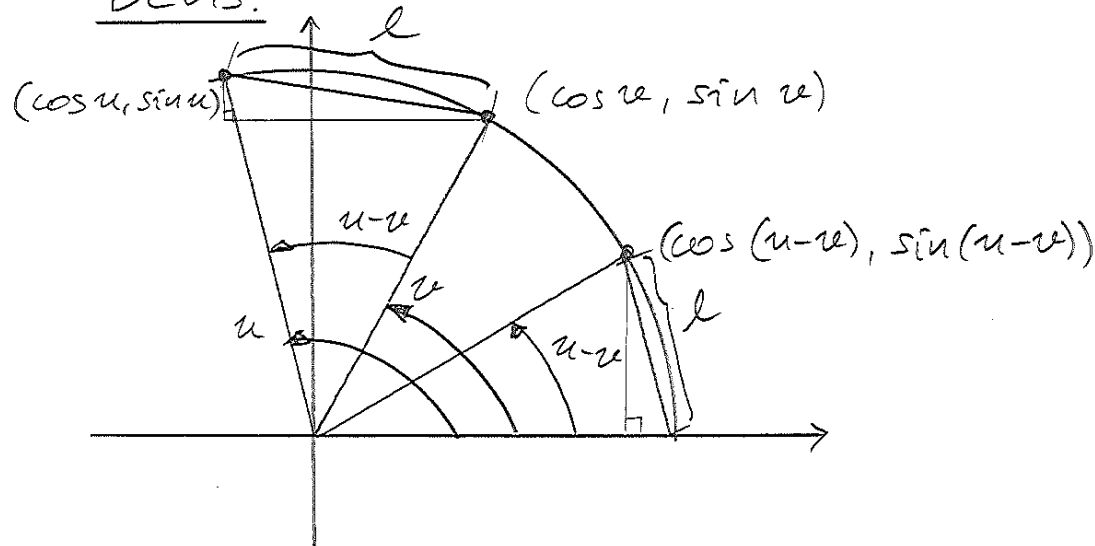
Notera: \tan är udda
 \tan är π -periodisk

Övning:
 Visa detta!

* Additionssformler

Sats: $\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$

Beweis:



Avståndsformeln ger

$$l^2 = (\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2$$

$$l^2 = (\cos(u-v) - 1)^2 + (\sin(u-v) - 0)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos^2 u} + \cancel{\cos^2 v} - 2\cos u \cdot \cos v + \cancel{\sin^2 u} + \cancel{\sin^2 v} - 2\sin u \sin v = \cancel{\cos^2(u-v)} - 2\cos(u-v) + \cancel{\sin^2(u-v)}$$

$$\Rightarrow \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$

✓ VSV
QED
▣

Från de grundläggande egenskaperna följer nu:

$$\begin{cases} \sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v \\ \cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v \\ \cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \end{cases}$$

Öving: Visa detta!

Memorera formeln för $\cos(u-v)$ och härled de övriga vid behov.

* Viktiga specialfall: dubbla vinkeln

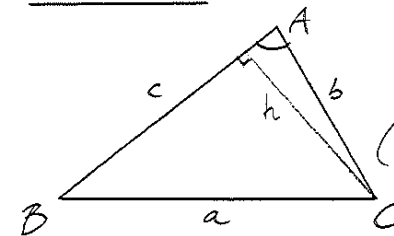
$$\begin{cases} \sin 2v = 2 \sin v \cdot \cos v \\ \cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v \end{cases}$$

Kunna!

* Triangelsölvning
(att "lösa" en triangel)

- För räta triangler: $\sin, \cos, \text{Pythagoras sats}$
- För allmänna triangler: $\text{sinussatsen och cosinussatsen}$

* Sats: Cosinussatsen



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(Notera: Pythagoras sats för $A = \pi/2$)

Beris: h

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cdot \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 + b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A \\ &= b^2 (\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_{=1}) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$



* Sats: Sinussatsen

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Beris: (se figur på föregående blad)

$$h = b \cdot \sin A$$

$$h = a \cdot \sin B$$

$$\Rightarrow b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$$

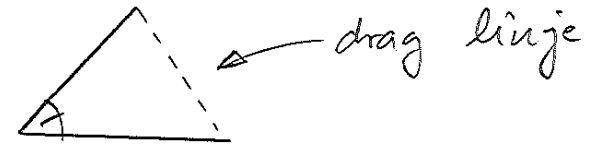
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

($\frac{\sin C}{c}$ visas på samma sätt)



* Villkor för lösbarhet

- Två sidor + mellanliggande vinkel

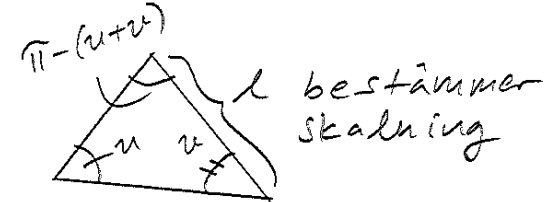


- Tre sidor

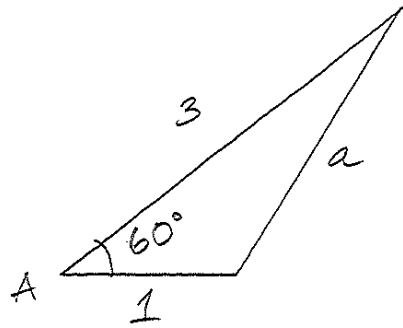


$$(a < b + c)$$

- Två vinklar och en sida



Exempel:



Cosinussatsen ger

$$a^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 9 + 1 - 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 10 - 3 = 7$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{7}}}$$